

Винт Джанибекова

Семён Франкович Адлай

Сектор теории устойчивости и механики управляемых систем

Отделение моделирования сложных физических и технических систем

Вычислительный центр имени А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН

(по мотивам двух выступлений 26 октября 2016 года и 16 мая 2018 года

на семинаре по механике космического полёта имени Всеволода Александровича Егорова)

Назовём свободное трёхосное хиральное твёрдое тело *винтом Джанибекова*. Для краткости, будем всюду писать винт, но подразумевать винт Джанибекова.

Обозначим \mathbf{m} – кинетический момент вращения и $\boldsymbol{\omega}$ – угловую скорость винта. Так как движение (по первоначальному условию) свободно, то кинетический момент \mathbf{m} фиксирован в “абсолютном неподвижном” пространстве, а угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ оказывается периодической функцией времени t (период которой, однако, не обязан быть конечным).

Прелюдия

Зафиксируем в “правом” винте подвижную в “абсолютном” пространстве, “правую” ортонормированную систему координат, (упорядоченный) правый репер $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ которой совпадает с (направленными) главными осями инерции, упорядоченными по возрастанию соответствующих моментов инерции $A < B < C$. Обозначим (по порядку) p, q, r – координаты псевдовектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в сей подвижной системе координат и, соответственно, запишем координаты псевдовектора \mathbf{m} (в той же подвижной системе координат и в том же порядке): Ap, Bq, Cr .

Координаты неподвижного, в “абсолютном” пространстве, псевдовектора \mathbf{m} не остаются постоянными в подвижной системе координат. Динамические уравнения Эйлера (в подвижной системе координат) могут быть записаны в виде:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где (\times) обозначает (правое) векторное произведение.¹ В классических источниках по механике функции p, q и r выражаются (с точностью до соответствующих множителей) посредством соответствующих эллиптических функций Якоби, которые обозначаются (по порядку) sn, cn и dn . Множители эллиптических функций Якоби, наряду с периодом угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, зависят как от заданных значений моментов инерции A, B и C , так и от значений постоянных “скалярных” произведений $h := \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}$ и $m^2 := \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}$. Не следует забывать о том, что (правый) репер $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ не был выбран однозначно, а лишь с точностью до действия четырёх-элементной группы Клейна V_4 , нетривиальный элемент которой соответствует полуобороту (избранной) системы координат (в теле) вокруг одной из трёх её осей, коллинеарных главным осям инерции.

¹Это означает, что в нашем упорядоченном правом базисе указанное векторное произведение детерминировано “циклической перестановкой тождества” $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$.

Знаки (трёх) функций p , q и r могут быть, соответственно, подвергнуты действию такого нетривиального элемента группы V_4 ,² который сменит два знака (из трёх) на противоположные. С другой стороны, если отождествить решения $\mathbf{w}(\cdot)$, аргументы которых отличаются сдвигом на (произвольный) промежуток времени, то выбрав его значение T , соответствующее полупериоду функции \mathbf{w} , получим

$$p(t+T) = -p(t), \quad q(t+T) = -q(t), \quad r(t+T) = r(t). \quad (2)$$

Отметим, что (последняя) эллиптическая функция dn знакопостоянная.³ Перманентное вращение относительно оси, с экстремальным моментом инерции, следует считать предельным случаем, при котором функция dn “превращается” в постоянную. Можем считать, что “заданному” кинетическому моменту \mathbf{m} , при заданном уровне энергии $-h/2$, соответствуют (всего) две, а не четыре (в силу попарного отождествления (2) решений $\mathbf{w}(\cdot)$, аргументы которых “сдвинуты” на полупериод T , относительно друг друга), непересекающиеся (в общем случае, когда $m^2 \neq Bh$) траектории перемещения “конца” вектора \mathbf{w} в теле. Соответствующие две замкнутые кривые (на эллипсоиде инерции) называются полодиями.

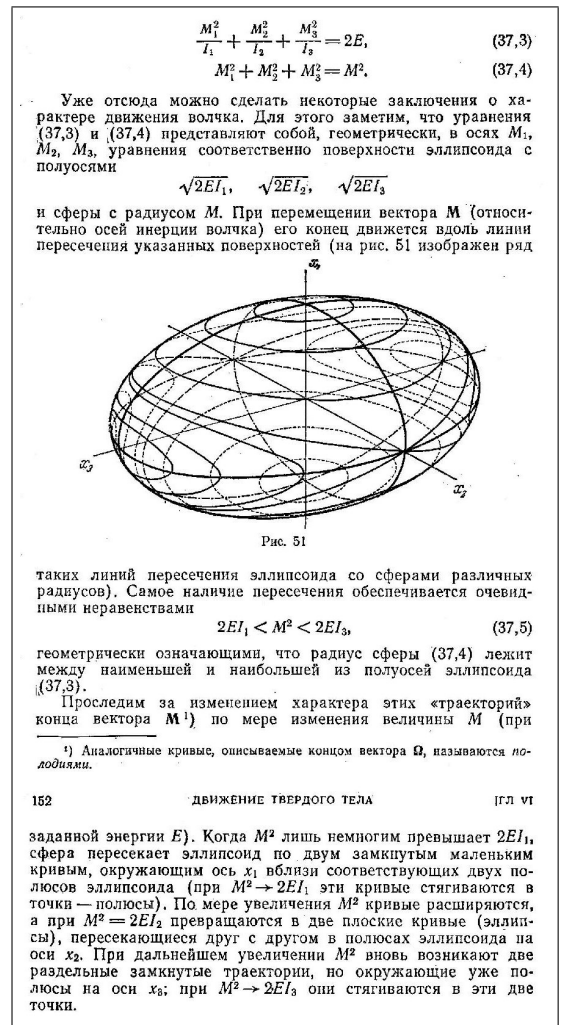
Здесь будет уместно приложить рис. 51 (из стр. 151) тома “Механика” курса теоретической физики Ландау Л.Д. и Лифшица Е.М. Линии пересечения сфер с эллипсоидом Мак-Кулага,⁴ указанные на рисунке, соответствуют так называемым кинетическим полодиям.⁵ Указанные на стр. 152 “эллипсы” пересечения эллипсоида Мак-Кулага со сферой, радиус которой совпадает с его средней главной осью, оказываются окружностями. Уже здесь следует обратить пристальное внимание на НЕ указанные на рисунке ориентации кинетических полодий. Полуокружности-сепаратрисы “склеивают” два класса кинетических полодий, ориентированных противоположно друг другу. На нашем следующем рисунке (пересечения единичной сферы с эллипсоидами Мак-Кулага, при моментах инерции, пропорциональных 2, 7, 8) представитель одного класса кинетических полодий изображён синим цветом ($m^2 < Bh$), а другого – красным ($m^2 > Bh$). Четыре полуокружности-сепаратрисы изображены зелёным цветом ($m^2 = Bh$), а направления “траекторий” конца вектора кинетического момента \mathbf{m} вдоль них (и соответствующих, прилегающих к ним кинетических полодий) указаны (зелёными) стрелками. Подчеркнём, что “движение по сепаратрисе, начатое с конца вектора \mathbf{j} , может быть продолжено по одной из двух полуокружностей, лежащих в единой плоскости”.

²Группу V_4 следует рассматривать как собственную нормальную подгруппу группы вращений тетраэдра A_4 : $V_4 \triangleleft A_4$.

³Строго говоря, уже здесь следует подразумевать дополнительное условие, а именно неравенство $m^2 > Bh$. Альтернативное условие $m^2 < Bh$ означало бы “транспозицию функций” sn и dn , дабы последняя соответствовала проекции \mathbf{w} на ось i с минимальным моментом инерции A . Пояснения подобных условий последуют в деталях!

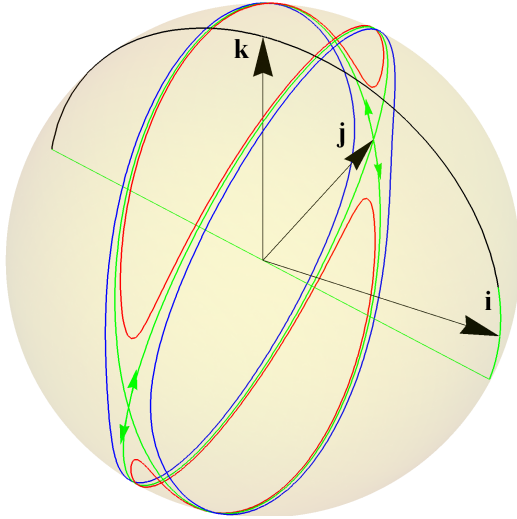
⁴Длины главных осей эллипсоида Мак-Кулага (прямо) пропорциональны соответствующим квадратным корням главных моментов инерции. Эллипсоид Мак-Кулага не следует путать с эллипсоидом инерции (Пуансо), длины осей которого ОБРАТНО пропорциональны указанным величинам.

⁵Мы же, в дальнейшем, будем рассматривать кинетические полодии на (единичной) сфере (а не на эллипсоиде Мак-Кулага).



заданной энергии E). Когда M^2 лишь немногим превышает $2EI_1$, сфера пересекает эллипсоид по двум замкнутым маленьким кривым, окружающим ось x_1 вблизи соответствующих двух полюсов эллипсоида (при $M^2 \rightarrow 2EI_1$ эти кривые стягиваются в точки — полюсы). По мере увеличения M^2 кривые расширяются, а при $M^2 = 2EI_2$ превращаются в две плоские кривые (эллипсы), пересекающиеся друг с другом в полюсах эллипсоида на оси x_2 . При дальнейшем увеличении M^2 вновь возникают две раздельные замкнутые траектории, но окружающие уже полюсы на оси x_3 ; при $M^2 \rightarrow 2EI_3$ они стягиваются в эти две точки.

Вскоре мы убедимся, что указанные четыре стрелки соответствуют четырём “классическим” решениям. Отметим, глядя на изображённую сферу “с внешней стороны”, что представители “синих” кинетических полодий “движутся по ходу часовой стрелки вокруг оси” \mathbf{i} , соответствующей минимальному моменту инерции A , а представители “красных” кинетических полодий “движутся против хода часовой стрелки вокруг оси” \mathbf{k} , соответствующей максимальному моменту инерции C .



Функциональное тождество (2) может быть геометрически (тройко) интерпретировано как

- переход (за время T) из избранной системы координат (в теле) с репером $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ в систему координат с репером $\{-\mathbf{i}, -\mathbf{j}, \mathbf{k}\}$,⁶
- полуоборот тела относительно той его главной оси, с экстремальным значением момента инерции, на которую угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ проецируется с постоянным знаком.⁷
- полуоборот кинетического момента \mathbf{m} в теле относительно той же главной оси,⁸ на которую угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ проецируется с постоянным знаком.

Полуоборот тела (или его системы координат $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$) относительно его средней главной оси \mathbf{j} позволит транспонировать “любые две одноцветные диаметрально-противоположные” кинетические полодии (с сохранением ориентации).⁹ В частности, такой полуоборот транспонирует две полуокружности-сепаратрисы, лежащие в единой плоскости, а полуоборот относительно главной оси, соответствующей (любому) экстремальному моменту инерции, транспонирует одну окружность (в одной плоскости) с другой.

После полного оборота (за период $2T$), и какова бы ни была наша интерпретация,¹⁰ кинетический момент \mathbf{m} возвращается в своё исходное положение в ТЕЛЕ.¹¹ Это, разумеется, никоим образом не означает, что за период $2T$ тело возвращается в исходное положение в “абсолютном” пространстве, поскольку возвращается оно лишь с точностью до оборота относительно (фиксированного) кинетического момента \mathbf{m} на угол 4ψ . О точной и высокоэффективной формуле вычисления полного эллиптического интеграла третьего рода, соответствующего углу ψ , было (впервые!) рассказано на девятой конференции по полиномиальной компьютерной алгебре в Петербурге 20 апреля 2016 г.¹² (http://pca.pdmi.ras.ru/2016/abstracts_files/PCA2016SA.pdf, <https://elibrary.ru/item.asp?id=26437493>).

⁶Мы снова подразумеваем условие $m^2 > Bh$. Иначе, при условии $m^2 < Bh$, перешли бы в систему координат $\{\mathbf{i}, -\mathbf{j}, -\mathbf{k}\}$.

⁷В случае “красных” кинетических полодий эта ось коллинеарна изображённому вектору \mathbf{k} , а в случае “синих” кинетических полодий – изображённому вектору \mathbf{i} .

⁸Мы никоим образом не намекаем на перемещение кинетического момента \mathbf{m} в “абсолютном” пространстве.

⁹Не следует однако упускать из внимания, что ориентации двух “диаметрально противоположных друг другу” кинетических полодий НЕ сохраняются при “центральной симметрии”, будучи “разновидностью несобственного вращения”.

¹⁰Разумеется, что нам следует выбрать (лишь) одну из трёх вышеуказанных интерпретаций.

¹¹Мы столь же гарантированно (независимо от интерпретации) возвращаемся к исходной системе координат с репером $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

¹²Появлению этой формулы способствовало вычисление, основанное на (глубоко конструктивном) учении Гаула, скорости прецессии как симметрической(!) функции трёх моментов инерции.

В действительности, (три) функции p, q, r могут быть получены циклической перестановкой (единой) альтернативной эллиптической функции,¹³ как детально изложено в статье “Torque free motion of a rigid body: from Feynman wobbling plate to Dzhhanibekov flipping wingnut” (2017).

Канон

Теперь рассмотрим вращение “левого” винта, полученного отражением исходного правого винта в неподвижном, в “абсолютном” пространстве, плоском зеркале. Обозначим \mathcal{M} (линейный) оператор (зеркального) отражения (неподвижного ортонормированного упорядоченного правого) базиса $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0\}$ в “абсолютном” пространстве в иной соответствующий (неподвижный ортонормированный упорядоченный левый) базис $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1\}$. Соответствующая оператору \mathcal{M} матрица перехода R (между двумя указанными базисами) ортогональна, симметрична и (следовательно) инволютивна (то бишь оператор \mathcal{M}^2 тождественный).¹⁴ Если обозначить $Q = Q(t)$ матрицу перехода из исходного неподвижного базиса $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0\}$ к подвижному правому базису $\{\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0\}$ в правом винте, то сопряжённая “подвижная” матрица QRQ^{-1} является матрицей перехода (соответствующая оператору отражения \mathcal{M}) между подвижным правым базисом $\{\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0\}$ правого винта и подвижным левым базисом $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1\}$ левого винта. Принято считать, что при отражении псевдовектора “меняют свои направления на противоположные”, но мы будем считать, что “правые” псевдовектора \mathbf{m}_0 и \mathbf{w}_0 отражаются в “левые” псевдовектора \mathbf{m}_1 и \mathbf{w}_1 с сохранением (знака) соответствующих координат в “новом” левом базисе.¹⁵ Заметным преимуществом такой (нераспространённой) точки зрения станет то, что векторное произведение правых псевдовекторов $\mathbf{m}_0 \times \mathbf{w}_0$ останется правым псевдовектором и отразится в левый псевдовектор $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{w}_1$ (с сохранением исходного знака). Соответственно, можем считать, что операция “правого” (псевдо)векторного произведения отразилась в соответствующую операцию “левого” (псевдо)векторного произведения. Это согласуется с тем, что векторное произведение двух “подлинных” векторов правого базиса $\{\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0\}$ непременно отразится в векторное произведение двух соответствующих (также упорядоченных) “подлинных” векторов левого базиса $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1\}$. Нам не понадобится (и не следует) считать, что векторное произведение двух “подлинных” векторов не является “подлинным” вектором.¹⁶ И теперь мы можем считать, что уравнения Эйлера (1), исходно рассмотренные в правом базисе, каковым является упорядоченный базис $\{\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0\}$, “отражаются” в соответствующие уравнения, с теми же координатами, в упорядоченном левом базисе $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1\}$, в котором векторное произведение становится соответственно “левым”.¹⁷

¹³Таковую перестановку можно считать элементом группы вращения треугольника $A_3 \cong A_4/V_4$.

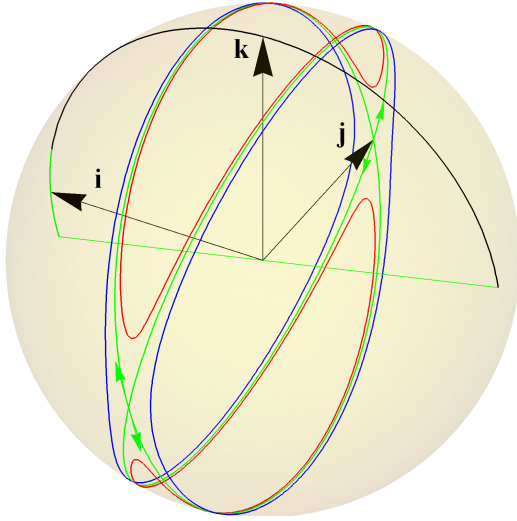
¹⁴При этом, разумеется, что матрица R , определитель которой -1 , НЕ принадлежит специальной ортогональной группе $SO_3(\mathbb{R})$.

¹⁵Это означает, что координаты отражённого левого псевдовектора (в отражённом левом базисе) совпадают (в точности и вплоть до знака) с координатами соответствующего правого псевдовектора (в исходном правом базисе).

¹⁶Вопреки стандартному подходу, которому мы не следуем, и согласно которому векторное произведение двух векторов (одного типа) “оказывается” псевдовектором. Такое (распространённое) заключение является следствием (порой неосознанного) упрямого “не тензорного” определения векторного произведения как неперменного правого, которое таковым (правым) остаётся и при отражении (незвизрая на то, что правый репер неизбежно отражается в левый).

¹⁷Идея согласования правого базиса с “правым” векторным произведением, а левого базиса – с “левым”, позволяет рассматривать уравнения Эйлера в качестве “тензорных”, как было предложено Михаилом Д. Сурначёвым (ИПМ им. Келдыша) тотчас же после семинара 16 мая 2018 г. При таком (абстрактном и методологически верном) подходе уравнения Эйлера удовлетворяют (естественным образом) как зеркальной симметрии, так и обратимости во времени. Стандартный “правый” подход приводил к путанице со знаком векторного произведения (двух псевдовекторов) $\mathbf{m} \times \mathbf{w}$. С одной стороны, независимо от выбора базиса, координаты такого векторного произведения, будучи псевдовектором, должны менять свои знаки, при отражении, на противоположные. С другой стороны, координаты векторного произведения двух отраженных псевдовекторов (уже сменивших знаки своих координат

Мы оказываемся вправе интерпретировать \mathbf{m} и \mathbf{w} , в уравнениях (1), как “левые вектора”,¹⁸ с соответствующим вращением тела по правилу “левой руки”.¹⁹ Ежели рассматривать соответствующие “левые” кинетические полодии как ориентированные кривые, то их ориентации оказываются противоположными ориентациям “правых”, как изображено на очередном рисунке. В этом смысле “правые” и “левые” уравнения Эйлера имеют противоположную друг другу “ориентацию” в теле, которая НЕ изменяется вслед за какими-либо изменениями “начальных условий”.²⁰



Таким образом, решив уравнение (1) для правого винта при заданном значении $m^2 > Bh$, мы не вправе забывать о соответствующем “левом” винте. А ежели $m^2 < Bh$, то мы и вовсе “обречены” на противоположное (нисходящее) упорядочивание моментов инерции $C > B > A$, дабы их порядок продолжил соответствовать исходному упорядочиванию эллиптических функций Якоби.²¹ Нам же следует осознать, что транспозиция (любых) двух главных осей, с учётом их направлений, меняет ориентацию кинетических полодий на противоположную (как показывает сравнение двух предшествующих рисунков, на которых одноимённый репер имеет две, отличные друг от друга, ориентации). Но какова бы ни была ориентация кинетических полодий нашего решения, мы не вправе забывать о противоположной ей. Лишь в критическом

случае движения (при $m^2 = Bh$), когда эллиптические функции “вырождаются” в гиперболические (а проекция угловой скорости \mathbf{w} не покидает один из четырёх квадрантов плоскости, ортогональной главной оси \mathbf{j} , с промежуточным моментом инерции B), мы можем “забыть” об упорядочивании моментов инерции и о выборе правого или левого базиса для решения системы уравнений (1). Но и в сём критическом случае, однажды получив четыре параметризации направленных полуокружностей-сепаратрис, следует вспомнить о четырёх иных параметризациях (с противоположной ориентацией). Критическому движению правого винта, при котором его “откручивание” сменяется на “закручивание” (по двум траекториям: <https://www.youtube.com/watch?v=e9wGPh-iiRw>), соответствует (зеркальная) смена “откручивания” левого винта на его “закручивание”. Если теперь заменить правый винт на левый и подвергнуть его “исходному” критическому движению (с прежним кинетическим моментом \mathbf{m}), то в зеркале мы увидим смену “закручивания” (отражённого) уже правого винта на его “откручивание” (по двум новым траекториям: https://www.youtube.com/watch?v=c0m_yeKeCiQ). Оказывается, что в критическом случае движения (при $m^2 = Bh$), ось, жёстко фиксированная в теле, ортогональная круговым сечениям эллипсоида Мак-Кулага и названная осью Галуа, вращается равномерно, в “абсолютном” пространстве. Точное (с учётом направления заданного “критического”

на противоположные) “должны” сохранять исходные знаки (ежели настаивать на выборе правого базиса в левом винте). Такая путаница лишь усугублялась тем, что отражение произведения двух базисных векторов непременно отличалось (и отличается) знаком от векторного произведения соответствующих (также упорядоченных) отражённых векторов. Возникшая неопределённость со знаком уравнений Эйлера, при отражении, порой (пагубно и неверно) разрешалась (неосознанным) переупорядочиванием и переходом на правый базис (окончательно исключив, тем самым, решение задачи о движении “отражённого” твёрдого тела из “классического” рассмотрения)!

¹⁸Так как хиральными (то бишь правыми или левыми) бывают лишь псевдовектора, то мы можем (для краткости) опускать приставку “псевдо”.

¹⁹Тогда, соответственно, “левыми” должны стать и репер, и собственно операция векторного произведения.

²⁰Ведь арсенал наших “изменений начальных условий” ограничен действием “чётной” группы V_4 .

²¹Здесь общепринято противоположное упорядочивание эллиптических функций Якоби вместо смены упорядочивания моментов инерции. В любом случае, знакопостоянной должна оказаться функция p – проекция угловой скорости \mathbf{w} на главную ось \mathbf{i} (с наименьшим моментом инерции A), а не на главную ось \mathbf{k} (с наибольшим моментом инерции C).

вращения) “инвариантное” описание оси Галуа было сформулировано Евгением А. Митюшовым (профессором кафедры теоретической механики УрФУ) в письме автору 27 февраля 2018 г. Протицируем его:

Для получения оси Галуа надо малую ось повернуть по ходу часовой стрелки на угол $\arccos \sqrt{\frac{C(B-A)}{B(C-A)}}$, глядя с конца вектора кинетического момента.²²

Кульминация

Вышеописанная, жёстко фиксированная в теле, ось Галуа вращается РАВНОМЕРНО, в “абсолютном” пространстве, “вокруг” фиксированного кинетического момента \mathbf{m} и остаётся (вечно) ортогональной к нему, если задано “начальное положение” тела, при котором его главная ось \mathbf{j} , с промежуточным моментом инерции B , коллинеарна кинетическому моменту \mathbf{m} . Такое равномерное вращение оси Галуа неизменно, независимо от того, вращается ли тело (перманентно) или свершает “кувырок” (<https://www.youtube.com/watch?v=5ipE5BB0mA0>)! В этом смысле, такое вращение УСТОЙЧИВО при том, что решение НЕ единственно!²³ Если бы мы подвергли “начальное положение” тела полуобороту относительно главной оси, с экстремальным моментом инерции, то ось Галуа отразилась бы (в теле) “зеркально” относительно такой главной оси.²⁴ С учётом направлений, можем считать, что группа V_4 порождает четыре “начальных положения” тела, соответствующие четырём (направленным) осям Галуа.²⁵ Функциональное тождество (2) может быть “продолжено” на критический случай $m^2 = Bh$ в том смысле, что четыре решения разбиваются на две пары, а именно пара $(\pm p, q, \pm r)$ и пара $(\pm p, -q, \mp r)$.²⁶ Такая пара инвариантна под действием полуоборота относительно средней оси инерции, но одна пара переходит в другую под действием полуоборота относительно (любой другой) оси, с экстремальным моментом инерции. Однако, критический случай движения НЕ исчерпывается четырьмя “классическими” решениями. Необходимо добавить к ним четыре решения, возникающие в ином (противоположно упорядоченном) базисе. Сравнивая наш последний рисунок с предыдущим, мы увидим смену ориентаций четырёх сепаратрис-полуокружностей в (том же) теле, порождённую отражением исходного базиса в “зеркале”, плоскость которого ортогональна оси \mathbf{i} , с наименьшим моментом инерции A .

Винт (или “гайка Джанибекова”) возвращается в “изначальное вращение” после двух “кувырков”, как то демонстрируют два следующих кадра видеосъёмки, по-видимому, с борта космической

²²Словосочетание “малая ось” используется здесь для указания оси с наименьшим моментом инерции A . Пояним, что описание подразумевает “начальное положение до кувырка”, при котором главная ось, с промежуточным моментом инерции B , коллинеарна “правому” псевдовектору кинетического момента \mathbf{m} . Указанный угол следует искать (и находить) на отрезке $[0, \pi/2]$.

²³Ситуация здесь аналогична “маятнику в верхнем положении равновесия”. Лишь в таком НЕ возмущённом положении маятника существует “тройное” решение, а именно “одно вечно неподвижное положение” и “двойное асимптотическое решение”. Эти (три) решения отвечают (ровно) одному и тому же уровню энергии (без каких-либо сколь угодно малых “добавок” или “убавок”).

²⁴Это в частном случае осесимметричного тела соответствует тому, что ось Галуа совпадёт с его осью симметрии и останется “инвариантной” при указанном отражении. В критическом случае движения осесимметричного твёрдого тела не только псевдовектор кинетического момента \mathbf{m} , но и псевдовектор мгновенной скорости \mathbf{w} остаётся постоянным в “абсолютном” пространстве. В теле оба (сонаправленных) псевдовектора \mathbf{m} и \mathbf{w} должны оставаться в “экваториальной” плоскости, ортогональной оси симметрии (Галуа). Это не противоречит убеждённости первооткрывателя “эффекта Джанибекова” в том, что “кувырок” имел бы место и в случае “юлы”. Однако, как также (интригующе) было им подмечено: мы не имели возможности длительного наблюдения её падения (<https://www.youtube.com/watch?v=hEsGgABKUIs&t=0s>)!

²⁵В сей работе, как подчёркнуто её заголовком, мы рассматриваем тела, не обладающие зеркальной (или какой-либо иной) симметрией, и потому указанные исходные положения различимы.

²⁶Каждый раз подразумевается единовременный выбор либо верхних, либо нижних знаков.



“Уши гайки Джанибекова смотрят вверх посередине первого кувырка” (справа),
и – “вниз посередине второго кувырка” (слева).

станции МИР. Точнее сказать, “гайка возвращается с поворотом, относительно исходного положения, на угол 4ψ ”, где ψ (в сём критическом случае) совпадает с углом, указанным Е.А. Митюшовым, а также совпадает и с (несобственным) интегралом

$$I(A, B, C) := I(A, B, C, x \mapsto +\infty),$$

$$I(A, B, C, x) := \int_1^x \frac{\sqrt{(C-B)(B-A)CA} dx}{(B(C-A)x^2 - (C-B)A)\sqrt{x^2-1}} = \sigma \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{A(B-C)}{C(A-B)}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \right),$$

$$\sigma = \begin{cases} 1, & \text{если } A < B < C, \\ -1, & \text{если } A > B > C, \end{cases}^{27}$$

и, по модулю $\pi/2$, с интегралом $I(C, B, A)$.²⁸ Здесь следует отметить замечательный вопрос о “механическом смысле параллельного переноса вектора вдоль замкнутого контура”, сформулированный Виктором Ф. Журавлёвым в статье: “Теорема о телесном угле в динамике твердого тела” (в журнале ПММ, **60**(2), 1996: 323–326).²⁹ Ведь, действительно, именно потому мы и рассматривали кинетическую полодию на единичной сфере, что к параллельному переносу касательного (вдоль неё) вектора применима теорема о совпадении угла поворота (вектора) с “охваченной” (кинетической полодией) площадью.³⁰ Уточним, что площадь следует вычислять с учётом знака (а, следовательно, с учётом ориентации кинетической полодии), а поворот касательного вектора должен включать углы (с соответствующим знаком) в точках “излома границы”.³¹ Подчеркнём, что “скачок” направления касательного вектора (в теле) совпадает, по модулю π , с тем же углом

²⁷ Нам прежде не приходилось переобозначать (а лишь переупорядочивать) моменты инерции, и мы впредь не будем этого делать (за сим единственным исключением)!

²⁸ В частности,

$$I(2, 7, 8) = \operatorname{Arcsin} \left(\frac{1}{\sqrt{21}} \right) \approx 0.219987977395459446, \quad I(8, 7, 2) = -\operatorname{Arccos} \left(\frac{1}{\sqrt{21}} \right) \approx -1.35080834939943717,$$

$$I(2, 7, 8) - I(8, 7, 2) = \operatorname{Arcsin} \left(\frac{1}{\sqrt{21}} \right) + \operatorname{Arccos} \left(\frac{1}{\sqrt{21}} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

²⁹ Эта работа примечательна и тем, что в ней (явно и, наверное, впервые) высказан вердикт, будоражащий “приверженцев комфортного догматического подхода”, а именно: “Геометрическая интерпретация Пуансо не является полной”.

³⁰ Пропорциональность угла и площади достигнута благодаря постоянству гауссовой кривизны на сфере.

³¹ Читатель легко догадается, что нас интересует смена направления касательного вектора в точках перехода

2ψ между осью Галуа и её отражением (в теле) относительно оси, с экстремальным значением момента инерции. Здесь мы не будем переходить к общей (амбициозной) постановке вопроса о рассмотрении замкнутого контура над группой Ли $SO_3(\mathbb{R})$, являющейся конфигурационным пространством всевозможных (не обязательно по инерции) движений твёрдого тела, с закреплённой точкой, а (скромно) останемся в рамках свободного движения, конфигурационное пространство которого параметризуется двумя (а не тремя) переменными. Мы всего лишь упомянем, что движение по полуокружности-сепаратрисе НЕ МОЖЕТ БЫТЬ ПРОДОЛЖЕНО ПО ИНЕРЦИИ в той же плоскости (в теле) в движение по окружности. Другими словами, точки пересечения сепаратрис являются фиксированными точками отражения (всех кинетических положений) относительно средней оси инерции.³²

Послесловие

И в наши дни вместо отчётливо полного описания (важнейшего) критического движения (при $m^2 = Bh$) мы встречаем одну формулу, соответствующую одной из двух параметризаций одной из четырёх сепаратрис. Таков подход в монографиях:

3. Если $G^2 = 2TA_2$, то равенства (2.3.1) имеют вид

$$p^2 = \frac{(A_2 - A_3)}{A_1(A_1 - A_3)}(2T - A_2q^2), \quad r^2 = \frac{(A_1 - A_2)}{A_3(A_1 - A_3)}(2T - A_2q^2). \quad (2.3.8)$$

Отсюда следует, что $A_1(A_1 - A_2)p^2 = A_3(A_2 - A_3)r^2$.

Если положить

$$\tau = \sqrt{\frac{2T(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{A_1A_2A_3}}(t - t_0),$$

то уравнение (2.3.2) в данном случае принимает вид

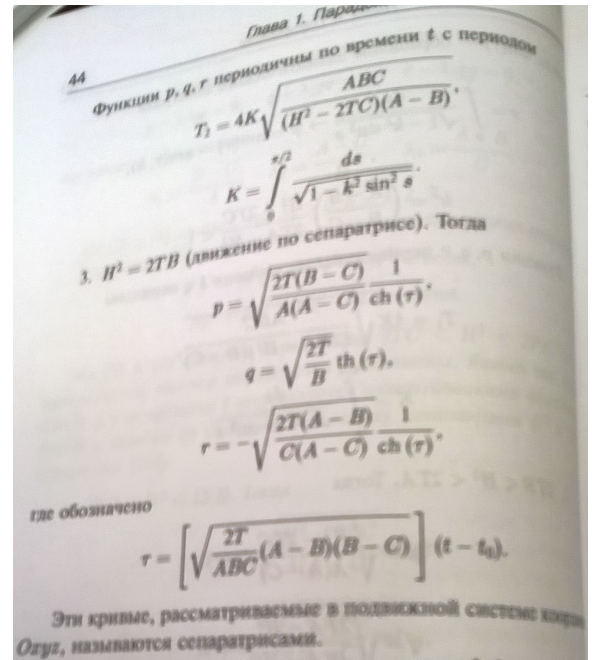
$$\frac{dq}{d\tau} = \pm \frac{1}{\sqrt{2TA_2}}(2T - A_2q^2). \quad (2.3.9)$$

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА 49

Сохраняем знак плюс в правой части (2.3.9). Пусть $q = 0$ при $t = t_0$. Тогда из (2.3.9) и (2.3.8) находим решение уравнений Эйлера (2.1.1), выражающееся через гиперболические функции

$$p = \sqrt{\frac{2T(A_2 - A_3)}{A_1(A_1 - A_3)}} \frac{1}{\operatorname{ch} \tau}, \quad q = \sqrt{\frac{2T}{A_2}} \operatorname{th} \tau, \quad r = -\sqrt{\frac{2T(A_1 - A_2)}{A_3(A_1 - A_3)}} \frac{1}{\operatorname{ch} \tau}. \quad (2.3.10)$$

Траектории движения вектора \mathbf{G} на единичной сфере в этом случае представляют собой сепаратрисы, разделяющие периодические движения, охватывающие оси A_1 и A_3 .



- Черноусько Ф.Л. Акуленко Л.Д. Лещенко Д.Д. *Эволюция движений твердого тела относительно центра масс*. Москва, Ижевск (2015 г.), стр. 49, формула (2.3.10).
- Журавлёв В.Ф. Розенблат Г.М. *Парадоксы, контрпримеры и ошибки в механике*. Ленанд (2017 г.), с. 44, формула “движения по сепаратрисе”.

В других “классических” источниках выписываются (четыре) параметризации для всех (четырёх) сепаратрис:

между “соседними сепаратрисами”, соответствующих точкам пересечений двух окружностей. А так как сепаратрисы оказываются геодезическими на сфере, то площадь, заключённая между двумя “соседними сепаратрисами”, совпадает, по модулю 2π , с вышеуказанным углом 4ψ .

³²Нам уже известно, что оси инерции являются осями симметрии кинетических положений. Такое отражение, относительно заданной оси, совпадает с полуоборотом вокруг неё и сохраняет ориентацию пространственной кривой. Её не следует путать с центральной симметрией или с “зеркальным” отражением (в плоскости), которые не сохраняют ориентацию отражённых пространственных кривых.

Так как $g = f = \mu$, то p , q и r принимает значения

$$\left. \begin{aligned} q &= \mu s = \epsilon^0 \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}, \\ p &= \mu \sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}} \sqrt{1-s^2} = \epsilon^0 \mu \sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}} \frac{2}{e^t + e^{-t}}, \\ r &= \mu \sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}} \sqrt{1-s^2} = \epsilon^0 \mu \sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}} \frac{2}{e^t + e^{-t}}, \end{aligned} \right\} (24)$$

где s , ϵ^0 , ϵ^0 по-прежнему равны ± 1 . Мы поставили перед q множитель ϵ^0 , так как, в зависимости от того, будем ли мы брать в равенстве (23) знак $+$ или $-$, мы получим для q значение с тем или иным знаком. Если, например, r_0 считать положительным, а p_0 — отрицательным, то нужно принять $\epsilon^0 = +1$ и $\epsilon^0 = -1$. Тогда первое уравнение Эйлера потребует, чтобы было $\epsilon = +1$. Такое определение знаков мы и примем. Когда t неограниченно увеличивается, то q , как мы видим, стремится к пределу μ , в то время как p и r имеют предел нуль. Поэтому мгновенная ось вращения стремится занять в теле предельное положение, совпадающее со средней осью эллипсоида инерции. В пространстве эта ось стремится к направлению Ox_1 или к направлению главного момента количества движения Oz , так как уравнения (20) показывают, что θ должно стремиться к $\frac{\pi}{2}$, а φ — к нулю. Следовательно, предельное положение Oy есть действительное Oz . Таким образом, движение стремится к равномерному вращению с угловой скоростью μ вокруг неподвижной оси.

Если p и r в начальный момент времени $t = 0$ равны нулю, то в уравнениях (24) нужно будет положить постоянную ϵ^0 равной ± 1 . Тогда p и r будут постоянно равны нулю, а q будет постоянно равно μ . В этом случае тело начнет вращаться вокруг главной оси инерции Oy , и это движение будет все время продолжаться.

Решения уравнений Эйлера (6.4), соответствующие полуджам-сепаратрисам, выражаются через гиперболические функции. Введем обозначение

$$\tau = \sqrt{\frac{2T(B-C)(A-B)}{ABC}}(t - t_0). \quad (6.16)$$

Тогда на кривой 1

$$p = \sqrt{\frac{2T(B-C)}{A(A-C)}} \cdot \frac{1}{\text{ch } \tau}, \quad q = \sqrt{\frac{2T}{B}} \text{th } \tau, \quad r = -\sqrt{\frac{2T(A-B)}{C(A-C)}} \cdot \frac{1}{\text{ch } \tau}; \quad (6.17)$$

на кривой 2

$$p = \sqrt{\frac{2T(B-C)}{A(A-C)}} \cdot \frac{1}{\text{ch } \tau}, \quad q = -\sqrt{\frac{2T}{B}} \text{th } \tau, \quad r = \sqrt{\frac{2T(A-B)}{C(A-C)}} \cdot \frac{1}{\text{ch } \tau}; \quad (6.18)$$

на кривой 3

$$p = -\sqrt{\frac{2T(B-C)}{A(A-C)}} \cdot \frac{1}{\text{ch } \tau}, \quad q = \sqrt{\frac{2T}{B}} \text{th } \tau, \quad r = \sqrt{\frac{2T(A-B)}{C(A-C)}} \cdot \frac{1}{\text{ch } \tau}; \quad (6.19)$$

на кривой 4

$$p = -\sqrt{\frac{2T(B-C)}{A(A-C)}} \cdot \frac{1}{\text{ch } \tau}, \quad q = -\sqrt{\frac{2T}{B}} \text{th } \tau, \quad r = -\sqrt{\frac{2T(A-B)}{C(A-C)}} \cdot \frac{1}{\text{ch } \tau}. \quad (6.20)$$

As the angular momentum L is constant in \mathcal{F}_2 the length is preserved in \mathcal{F}_2 , which means L must lie on the L -sphere with equation

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2. \quad (13)$$

Thus the trajectory of L must lie on the intersection between the energy-inertia ellipsoid (12) and L -sphere (13), which in general forms two closed curves. The time evolution on these curves can be expressed in terms of Jacobi elliptic functions, see, e.g. [1, 12], which we write as

$$L(t; E, L, \epsilon) = (L_x(t), L_y(t), L_z(t))^T \quad (14)$$

where the parameters on the right hand side are suppressed. Specifically, when $E L_1^{-1} < 2E < E L_2^{-1}$ the components are

$$\begin{aligned} (15) \quad L_x &= s_1 \sqrt{\frac{L_1(L_1 - 2E)}{L_2 - L_1}} \text{cn}(\tau, k^2), & L_y &= \sqrt{\frac{L_1(L_1 - 2E)}{L_2 - L_1}} \text{sn}(\tau, k^2) \\ L_z &= -\sqrt{\frac{L_1(2E - E)}{L_2 - L_1}} \text{dn}(\tau, k^2) \end{aligned}$$

with

$$(16) \quad \tau = \sqrt{\frac{(L_2 - L_1)(2E L_1 - E^2)}{L_2 L_1}}(t + c), \quad k^2 = \frac{(L_2 - L_1)(E^2 - 2E L_1)}{(L_2 - L_1)(2E L_1 - E^2)}$$

and the two constants c (phase shift) and s (direction that is either ± 1) that appear are chosen to satisfy the initial conditions. As we will only be using counterclockwise twists in our computations, $s = +1$ always, and thus we omit this constant in the parameters of (14). It is important to note the minus sign in (15) for L_z occurs because $L_2 > L_1 > L_3$ for the dices, and that had the inequalities been reversed, i.e. $L_1 < L_2 < L_3$, there would be no minus sign. As the Jacobi elliptic functions are periodic in τ with period $4K(k^2) = 4 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 u^2}}$, the period of the orbit is

$$(17) \quad T(E, L) = 4K(k^2) \sqrt{\frac{L_1 L_2}{(L_2 - L_1)(2E L_1 - E^2)}}$$

where $K(k^2)$ is the complete elliptic integral of the first kind. When $E L_1^{-1} < 2E < E L_2^{-1}$, the results presented in (15), (16) and (17) need to be modified by swapping $L_2 \leftrightarrow L_1$ and $L_3 \leftrightarrow L_2$. In the limiting case when $2E \rightarrow E L_2^{-1}$ the energy becomes minimal and the two closed curves shrink to the points given by $(\pm 1, 0, 0)$. Similarly, when $2E \rightarrow E L_1^{-1}$ the energy becomes maximal and the curves shrink to the points at $(0, 0, \pm 1)$. When $2E = E L_1^{-1}$ the Jacobi elliptic functions reduce to hyperbolic functions given by

$$(18) \quad L_x = s_1 \sqrt{\frac{L_1(L_1 - L_2)}{L_2(L_2 - L_1)}} \text{sech } \tau, \quad L_y = s_2 \tanh \tau, \quad L_z = -s_3 s_2 \sqrt{\frac{L_1(L_2 - L_1)}{L_2(L_2 - L_1)}} \text{sech } \tau.$$

- Апфель П. *Теоретическая механика II*. Москва: ГИФМЛ (1960 г.), стр. 156, формула (24).
- Маркеев А.П. *Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью*. Москва: ГИФМЛ (1992 г.), стр. 40, формулы: (6.17),(6.18),(6.19),(6.20).
- Tong W. Dullin H.R. *A new twisting somersault – 513XD* // Journal of Nonlinear Science **27**, 6 (2017): 2037–2061, formula (18).

Некоторые авторы “догадались”, что и последние четыре формулы не дают полного описания всех случаев критического движения, а лишь “половину”. Верная догадка привела их к дополнительным четырём формулам, соответствующим ориентациям, противоположным таковым для четырёх “классических” сепаратрис. Ограничимся двумя (типовыми) примерами, в которых приводятся такие формулы, а именно:

Проинтегрировав это уравнение, мы найдём:

$$\pm \frac{1}{2n} \ln \frac{n + \chi}{n - \chi} = t + \beta,$$

где β — произвольная постоянная. Разрешив это уравнение относительно χ , мы получим:

$$\chi = \pm n \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}} = \pm n \text{th } \theta,$$

где

$$\theta = n(t + \beta).$$

Воспользовавшись формулой

$$1 - \text{th}^2 \theta = \text{sech}^2 \theta,$$

мы найдём отсюда:

$$\omega_x = \pm n \alpha_1 \text{sech } \theta, \quad \omega_y = \pm n \alpha_2 \text{th } \theta, \quad \omega_z = \pm n \alpha_3 \text{sech } \theta. \quad (47.61)$$

Так как при безграничном возрастании времени t аргумент θ стремится к бесконечности и, следовательно, $\text{sech } \theta$ стремится к нулю, то из последних уравнений мы заключаем, что в разбираемом случае движение асимптотически приближается к вращению с постоянной угловой скоростью $n \alpha_2$ вокруг средней оси эллипсоида инерции.

- Суслов Г.К. *Теоретическая механика* (3-е издание). Москва: ГИТТЛ (1946 г.), стр. 534, формула (47.61).
- Петров А. Г. Володин С. Е. “Эффект Джанибекова” и законы механики. Доклады Академии наук (2013 г.), том 451, № 4, стр. 401, формула (6).

Подставляя вместо X и Z выражения компонент вектора кинетического момента X и Z , найденные из законов сохранения (3),

$$X^2 = \frac{B-C}{A-C} (K^2 - Y^2), \quad Z^2 = \frac{A-BC}{A-C} (K^2 - Y^2), \quad (5)$$

получим уравнение для Y

$$\frac{dY}{dt} = \pm \alpha \sqrt{K^2 - Y^2}, \quad \alpha = \frac{K}{B} \sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{AC}}.$$

Решение уравнения для Y выражается через гиперболический тангенс, а X , Y и $\cos \theta$ находятся из (5) и (2) [5]:

$$\begin{aligned} X &= \pm K \sqrt{\frac{(B-C)A}{B(A-C)}} \frac{1}{\text{ch } \alpha t}, & Z &= \pm K \sqrt{\frac{(A-B)C}{B(A-C)}} \frac{1}{\text{ch } \alpha t}, \\ Y &= \pm K \text{th } \alpha t, & \cos \theta &= \pm \text{th } \alpha t. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) видно, что движение вектора K от полюса B к полюсу V происходит по одной из четырех полуокружностей, а угол нутации θ меняется в интервале $(0, \pi)$. При точном попадании в сепаратрису это движение происходит за бесконечно большое время.

Тем самым, в своём (бесспорно похвальном) стремлении к исчерпывающему перечню восьми случаев, авторы четырежды “пожертвовали” верным знаком в уравнениях Эйлера, угодив в “классическую ловушку”, описанную в сноске (17).³³ Ими не было осознано, что “левые” полодии (ориентации которых противоположны правым) непременно соответствуют траекториям движения конца “левого” (но никак не “правого”) псевдовектора угловой скорости, а “левые” кинетические полодии (столь же непременно) соответствуют траекториям движения конца “левого” (а не “правого”) псевдовектора кинетического момента.³⁴ Без пояснения того, что в четырёх из восьми полученных параметризации, псевдовектора \mathbf{m} и \mathbf{w} меняют не только знак (и, соответственно, направление), но и хиральность (которая НЕ зависит от направления), мы НЕ можем считать случай критического движения исчерпывающе решённым. Пользуясь случаем, подчеркнём, что смене ориентаций полодий соответствует не только “отражение в пространстве”, но и “отражение во времени”: $t \mapsto -t$,³⁵ и отметим, что фиксированной точкой такого отражения следует считать не только нуль ($t = 0$), но и (комплексную) бесконечность ($t = \infty$).³⁶ Соответствующей (отражению времени $t \mapsto -t$) матрицей перехода между упорядоченным подвижным правым базисом $\{\mathbf{i}_+, \mathbf{j}_+, \mathbf{k}_+\}$ и упорядоченным подвижным левым базисом $\{\mathbf{i}_-, \mathbf{j}_-, \mathbf{k}_-\}$ следует считать матрицу QDQ^{-1} , где матрица D отличается от единичной матрицы одним (единственным) знаком её центрального элемента, а “подвижная” матрица Q обращается в единичную в нуле. Таким образом, координаты p , q и r правого псевдовектора угловой скорости \mathbf{w}_+ , относительно соответствующего правого базиса $\{\mathbf{i}_+, \mathbf{j}_+, \mathbf{k}_+\}$, ВСЕГДА совпадают с координатами левого псевдовектора угловой скорости \mathbf{w}_- , относительно соответствующего левого базиса $\{\mathbf{i}_-, \mathbf{j}_-, \mathbf{k}_-\}$. В частности, условие $q(0) = 0$ означает совпадение, в соответствующий момент $t = 0$, (координат) псевдовекторов \mathbf{w}_+ и \mathbf{w}_- (не только в теле, но и) в “абсолютном” пространстве (когда матрицей перехода между подвижными правым и левым базисом оказывается матрица D ,³⁷ а угловая скорость оказывается ортогональной средней оси инерции).³⁸ Отклонение значения q от нуля означает, что псевдовектора \mathbf{w}_+ и \mathbf{w}_- не только перестают совпадать в “абсолютном” пространстве, но и в теле (поскольку их совпадающие координаты “выписаны” в подвижных базисах, с исходно противоположными друг другу направлениями средней оси). Мимолётное совпадение \mathbf{w}_+ и \mathbf{w}_- (в “абсолютном” пространстве) не могло быть продолжено, так как такое совпадение “порождало” противоположные друг другу вращения тела. Разумеется, что повторные совпадения \mathbf{w}_+ и \mathbf{w}_- в теле (в силу периодичности угловой скорости) не влекут повторное совпадение в “абсолютном” пространстве. Подчеркнём, что (при любом фиксированном t) матрицы $Q(t)$ и $Q(-t)$ являются (взаимно) сопряжёнными, с сопрягающей матрицей D . Таким образом, критическое движение ($m^2 = Bh$) не только разделяет два класса движений ($m^2 < Bh$ и $m^2 > Bh$), но и противоположные друг другу ориентации решений, соответствующих “правым” и “левым” уравнениям Эйлера (а наш “эксперимент” с зеркальным “кувырком гайки Джанибекова” оказался и отражением во

³³ Авторы, не справившись с (недооценённой ими) проблемой знаков, не стали её комментировать.

³⁴ Тем самым, “подгон знаков” чреват “неожиданными катастрофическими последствиями”!

³⁵ И здесь нельзя “упрямо” оставаться в рамках “правых” уравнений Эйлера, ибо ориентация “траектории конца” псевдовектора $-\mathbf{w}(-t)$ совпадает с ориентацией “траектории конца” (исходного) псевдовектора $\mathbf{w}(t)$! Подчеркнём, что путать смену хиральности псевдовектора со сменой его знака было бы не менее нелепо, чем путать (во взвешенном ориентированном графе) смену направления “дуги” со сменой знака её веса.

³⁶ Как справедливо подчёркивает Дмитрий Л. Абраров (ВЦ ФИЦ ИУ РАН), область определения времени в задачах “классической механики” должна быть пополнена точкой “комплексной” бесконечности. “Выкалывание” этой точки из “компактной” области определения является, увы, (методологически фундаментальной и весьма распространённой) ошибкой!

³⁷ Матрица D выполняет здесь (по аналогии с матрицей R) “функцию” отражения “неподвижного” правого базиса в “неподвижный” левый базис, коими, соответственно, являются базисы $\{\mathbf{i}_+, \mathbf{j}_+, \mathbf{k}_+\}$ и $\{\mathbf{i}_-, \mathbf{j}_-, \mathbf{k}_-\}$ в МОМЕНТ $t = 0$.

³⁸ Условие $q(0) = 0$ не может быть выполнено лишь при перманентном вращении относительно средней оси инерции.

времени в строгом, вышеописанном смысле, когда $R = D$).³⁹

В (двух) прикрепленных файлах мотивирующее письмо Д.Л. Абрарова по случаю аварии (28 ноября 2017 года) вследствие ошибки алгоритма разгонного блока “Фрегат” и “официальные пояснения” причины этой аварии Госкорпорацией “РОСКОСМОС”. Мы разделяем мнение Д.Л. Абрарова о том, что исправление подобных ошибок потребует фундаментального переосмысления “первоисточников”, а не “всего лишь поправку” знаков. Наша позиция не согласуется с позицией (исполняющего обязанности главного научного сотрудника нашего сектора) Сергея Я. Степанова, который склонен сводить причину указанной катастрофы к деградации инженерных кадров. Он не склонен “придираться” к знакам, и потому (наверное) возражает распространению сей “лишней” работы в научном сообществе.⁴⁰ К счастью, серьёзный и тщательный разбор верных знаков был выполнен коллективом кафедры теоретической механики УРФУ, который получил и выложил анимацию (всех случаев) СТРОГО критического движения “гайки” Джанибекова (в свободном доступе по ссылке <https://www.youtube.com/playlist?list=PLvKkSzWgY7KUUSDqHvdv0mst4nBnLe64>).⁴¹ Такую анимацию точного аналитического решения (с равномерно вращающейся осью Галуа) не следует путать с какой-либо другой анимацией, найденного численными методами иного приближённого решения в “окрестности сепаратрисы” (полученного, в частности, с помощью алгоритмов “Modelica” С.Я. Степановым за малую долю часа).

³⁹ Тем самым, мы узнаём, что (малодушное) пренебрежение открытием “эффекта Джанибекова” свидетельствует о “контагиозно” небрежном обращении со знаками и о “комфортно” одностороннем (вышеописанном, не “тензорном”, “правом”) взгляде, чреватом пропуском (в лучшем случае) или ошибочной подменой “половины” всех решений уравнений Эйлера. Следует, ещё раз, провести аналогию с двумя классами “ориентированных” движений “вращающегося математического маятника”: “по и против часовой стрелки”, переход между которыми возможен “обращением времени” $t \mapsto -t$, но невозможен никакими “чётными”, сохраняющими ориентацию, перестановками.

⁴⁰ А порой, в бессилии привести опровержения, “обосновывает” свои возражения тем, что наши рассуждения противоречат некоему (якобы) “здравому смыслу”.

⁴¹ Тем, кто продолжает сомневаться в принципиальной важности установления знака, можем предложить три интересные (и даже драматические) истории о знаках:

- о знаке квадратичной суммы Гаусса $\sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}k^2}{p}}$, нахождение которого потребовало (от Гаусса) четырёх лет (с 1801 г. по 1805 г.),
- о “принципиальной” противоположности знаков двух (двойственных друг другу) уравнений (Фарадея–Максвелла–Хевисайда): $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ и $\nabla \times \mathbf{B} = c^{-2} \partial \mathbf{E} / \partial t$,
- о знаке модифицированной евклидовой последовательности полиномиальных остатков (возникшей в (142 стр.) работе Сильвестра в 1853 г. на смену “исходной” последовательности в (4 стр.) работе 1840 г.), выявленном в красивейшей теореме Anna Johnson Pell (Пелевин) и Ruth Gordon, опубликованной в 1917 г. (подробности о предшествующих тщетных попытках, “связать” формулой “модифицированный” знак с “исходным”, описаны Akritas A.G. Malaschonok G.I. Vigklas P.S. “On a Theorem by Van Vleck Regarding Sturm Sequences” // *Serdica Journal of Computing* 7(4), 2013: 101–134.)