УДК 531.01; 531.19

ДВОЙСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ НИТИ В ПРИТЯГИВАЮЩИХ И ОТТАЛКИВАЮЩИХ ПОЛЯХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

С.Ф. Адлай*

Исследованы решения уравнений равновесия нерастяжимой однородной нити в поле параллельных потенциальных сил. Показано, что физически нереализуемые решения с отрицательным натяжением оказываются решениями с положительным натяжением для двойственной задачи. Дана точная формулировка двойственной задачи и двойственных друг другу решений. Указаны дробно-линейные преобразования, переводящие решения с отрицательным натяжением в двойственные решения с положительным натяжением и обратно. Существование двойственных решений и дробно-линейного преобразования между двойственными друг другу решениями гарантированы в случае постоянных сил. В случае линейных параллельных сил существование пары двойственных друг другу решений гарантирует существование дробно-линейного преобразования между ними, которое оказывается преобразованием между ограниченным и неограниченным решениями. Невырожденные преобразования в случае линейных параллельных сил могут существовать и в отсутствие двойственных решений, а именно, между неограниченными решениями без экстремальных точек.

Ключевые слова: нерастяжимая однородная нить, равновесная форма, поле параллельных сил, погонная потенциальная сила, однозначная силовая функция, невырожденное дробно-линейное преобразование, двойственность.

* *e-mail: SemjonAdlaj@gmail.com*

Рассмотрим задачу о равновесных формах нерастяжимой однородной нити конечной длины l с закрепленными концами в поле параллельных сил. В равновесии нить будет лежать в плоскости, параллельной линиям действия сил, а проекция натяжения нити на перпендикуляр к линии действия сил будет постоянной [1].

В плоскости нити введем систему координат с осью z, параллельной линии действия сил, назовем ее *вертикальной осью*, и осью x, перпендикулярной вертикальной оси, назовем ее *горизонтальной осью*. Пусть s – натуральный параметр, отсчитываемый вдоль нити. Сила, действующая на бесконечно малый элемент нити с координатами (x, z), не зависит от координаты x и пропорциональна его длине ds. Обозначим эту силу $f(z)\,ds$. Будем полагать силу f, отнесенную к единице длины нити, потенциальной с однозначным потенциалом $u = u(z)$:

$$f = -u'.$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование функции по её аргументу.

Несмотря на то, что вертикальное положение нити является формой ее равновесия, будем полагать, что форма равновесия задается однозначной функцией

$$z = z(x).$$

Натяжение нити t в точке (x, z) можно выразить формулой

$$t = c\sqrt{1 + z'^2},$$

где c – горизонтальная составляющая силы натяжения нити. По условию задачи она постоянна, так как силы, действующие на нить, направлены вдоль вертикальной оси и не имеют горизонтальной составляющей. Будем полагать, что $0 < |c| < \infty$.

Из уравнения равновесия бесконечно малого элемента нити

$$c\,dz' + f(z)\sqrt{1+z'^2}\;dx = 0$$

следует равенство

$$\frac{c\,z''}{\sqrt{1+z'^2}} = -f(z),$$

умножая которое на z' и интегрируя, получим формулу

$$c\,\sqrt{1+z'^2} = u(z) - \lambda, \tag{1}$$

являющуюся частным случаем формулы

$$t = t(z) = u(z) - \lambda,$$

определяющей натяжение, когда существует однозначная силовая функция [1]. Здесь λ – постоянная интегрирования.

Из формулы (1) следует неравенство

$$|c| \le |u(z) - \lambda|,$$

которое в случае положительного натяжения примет вид

$$\lambda + c \le u(z), \tag{2}$$

а в случае отрицательного натяжения вид

$$\lambda + c \ge u(z). \tag{3}$$

В любом случае, если $\bar{x}$ – точка локального экстремума функции z

$$z'(\bar{x}) = 0, \;\; \bar{z} = z(\bar{x}),$$

то

$$\lambda + c = u(\bar{z}).$$

Соотношение (1) можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции z, зависящее от известной функции u и двух констант λ и c, зависящих, в свою очередь, от граничных условий и длины l. Обозначим $z(u, \lambda, c)$ не только решение этого уравнения на отрезке, соответствующем закрепленным концам нити при заданных параметрах λ и c, но и его продолжение, если таковое имеется. Решение $z = z(u, \lambda, c)$ будем называть ограниченным, если существует константа $C < \infty$, для которой выполнено неравенство

$$|z| \leq C,$$

и неограниченным, если такой константы не существует.

Зафиксируем λ и $c > 0$. Введем *двойственные друг другу решения* z_+ и z_-

$$z_+ = z(u, \lambda, c), \;\; z_- = z(u, \lambda, -c)$$

и потенциал u^*, *двойственный потенциалу* u

$$u^* = 2\lambda - u.$$

Двойственный потенциал u^* является силовой функцией погонной силы f

$$f = u^{*\prime}.$$

Будем называть решение $z(u^*, \lambda, c)$ *решением двойственной задачи*. Тогда решение с отрицательным натяжением z_-, двойственное решению z_+ исходной задачи, оказывается решением двойственной задачи с положительным натяжением, то есть

$$z_- = z(u^*, \lambda, c).$$

Решение, двойственное решению двойственной задачи, совпадает с первоначальным

$$z_+ = z(u^*, \lambda, -c),$$

и задача, двойственная двойственной задаче, совпадает с первоначальной.

Укажем преобразования, переводящие решения в двойственные им решения, в двух случаях:

1. В случае $u(z) = z$ преобразование имеет вид $z \mapsto 2\lambda - z$.
2. В случае $u(z) = z^2$ преобразование имеет вид $z \mapsto \dfrac{\sqrt{\lambda^2 - c^2}}{z}$.

В обоих случаях точка локального экстремума $\bar{x}$ функции z_- со значением $\bar{z}_-$ становится, под действием соответствующего преобразования, точкой локального экстремума функции z_+ со значением $\bar{z}_+$. Переход между двумя экстремальными значениями $\bar{z}_-$ и $\bar{z}_+$ функций z_- и z_+ соответствует переходу между двумя экстремальными значениями $\lambda - c$ и $\lambda + c$ двойственных друг другу потенциалов u^* и u. На рис. 1 пунктиром показаны двойственные друг другу формы равновесия, соответствующие потенциалу $u(z) = z$, сплошными линиями – потенциалу $u(z) = z^2$.

В первом случае оба решения z_+ и z_- оказываются неограниченными. Во втором только z_+ является неограниченным. Решение z_- во втором случае, в силу (3), ограничено неравенством

$$z_-^2 \leq \lambda - c.$$

В частности, $z_- \equiv 0$, а преобразование становится вырожденным при $\lambda = c$; и решение z_- не существует, если $\lambda < c$. В случае $\lambda < c$ не существует и решение двойственной задачи с положительным натяжением $z(u^*, \lambda, c)$, но существует двойственное ему решение с отрицательным натяжением $z(u^*, \lambda, -c)$. Отметим, что при $\lambda < -c$ в неравенстве (2) для решения z_+ равенство не достигается, так как в этом случае

$$z_+^2 \geq 0 > \lambda + c,$$

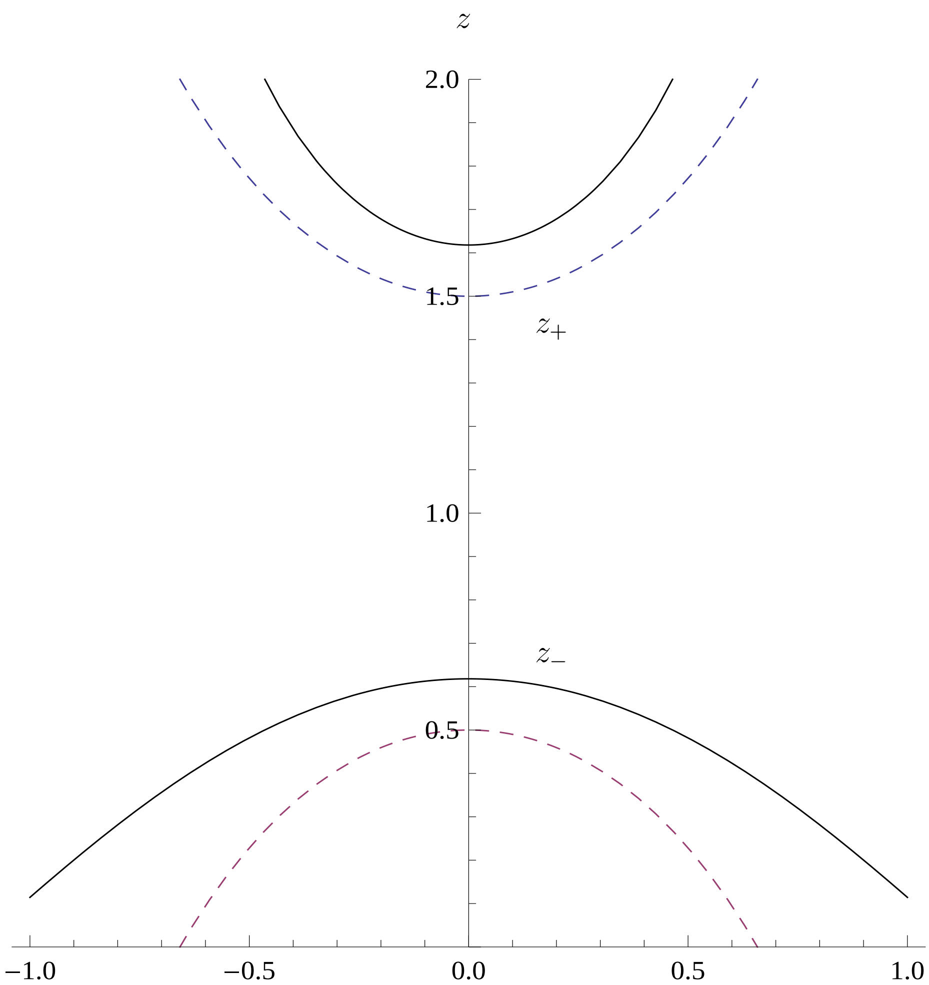

Рис. 1

и функция z_+ не имеет локальных экстремумов.

Убедимся в том, что если $\lambda > c$, то уравнение

$$\sqrt{1 + z_+'^2} = c^{-1}\left(z_+^2 - \lambda\right) \tag{4}$$

эквивалентно уравнению

$$\sqrt{1+z_-'^2} = -c^{-1}\left(z_-^2 - \lambda\right). \tag{5}$$

Действительно, в силу соотношений

$$z_- = \sqrt{\lambda^2 - c^2}\, z_+^{-1}, \;\; z_-' = -\sqrt{\lambda^2 - c^2}\, z_+' z_+^{-2}$$

уравнение (5) эквивалентно уравнению

$$\sqrt{1 + (\lambda^2 - c^2) z_+'^2 z_+^{-4}} = -c^{-1}\left((\lambda^2 - c^2) z_+^{-2} - \lambda\right),$$

которое после умножения на $z_+^2 \geq \lambda + c > 0$ и подстановки

$$z_+^2 = c\sqrt{1 + z_+'^2} + \lambda$$

в его левую часть превращается в уравнение

$$\sqrt{\left(c\sqrt{1 + z_+'^2} + \lambda\right)^2 + (\lambda^2 - c^2)\, z_+'^2} = -c^{-1}\left(\lambda^2 - c^2 - \lambda z_+^2\right),$$

упростив которое, получим

$$\lambda\sqrt{1 + z_+'^2} + c = \lambda c^{-1}\left(z_+^2 - \lambda\right) + c,$$

и, следовательно, уравнение (5) эквивалентно уравнению (4), как утверждалось.

Подчеркнем, что в случае $\lambda \leq c$ уравнение (5) не эквивалентно уравнению (4), несмотря на то, что z_+ существует. В частности, уравнение (5) не эквивалентно уравнению (4) при $\lambda < -c$, когда указанное дробно-линейное преобразование существует и невырожденное. На рис. 2 представлены два решения уравнения (1) при $u(z) = z^2$ и $\lambda < -c$, переходящие одно в другое при указанном дробно-линейном преобразовании, но не двойственные друг другу.

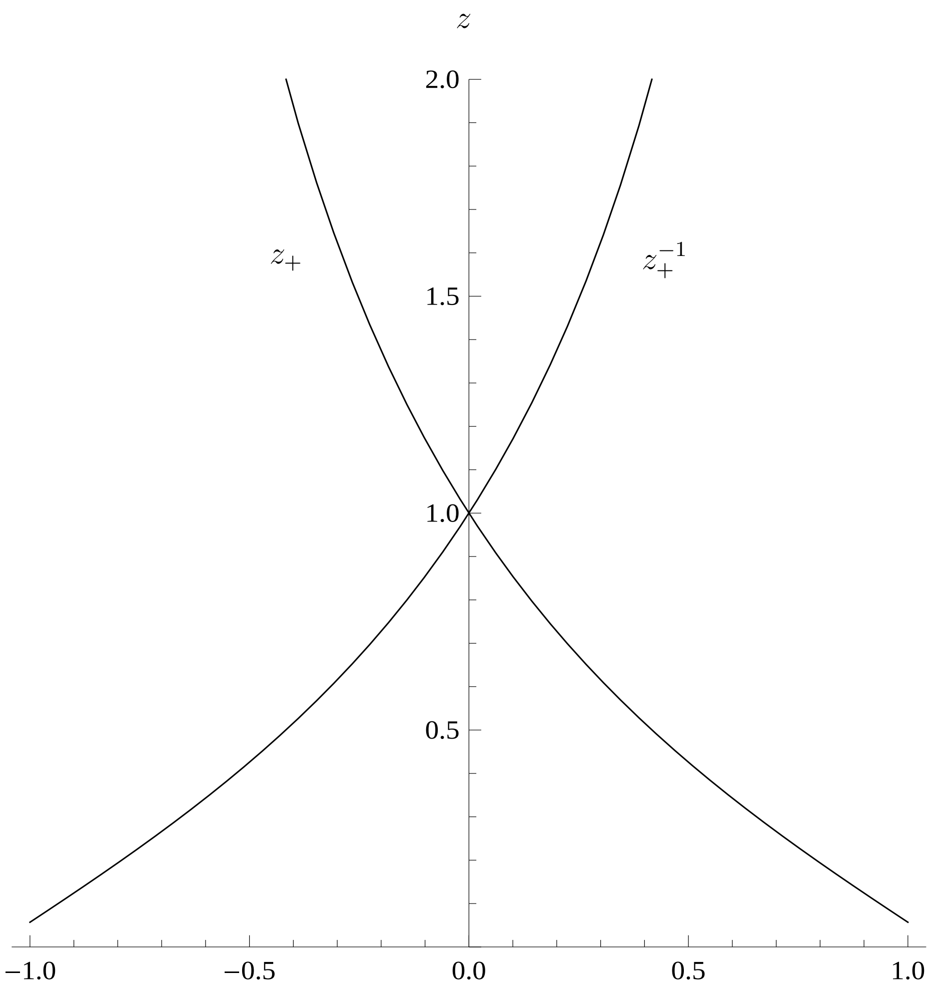

Рис. 2

Во втором случае мы установили, что все решения двойственной задачи с двойственным потенциалом u^* и с положительным натяжением являются ограниченными. Это означает, что все физически реализуемые заданные однозначными функциями формы равновесия нити в случае отталкивающих от горизонтальной оси линейных параллельных сил принадлежат классу ограниченных функций. В случае притягивающих к горизонтальной оси сил последнее утверждение не имеет места.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 08-01-00600).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аппель П.* Теоретическая механика Т. 1. М. ГИФМЛ. 1960.