

关于椭圆周长的一个完美的计算公式

Semjon Adlaj

第 1 类和第 2 类完全椭圆积分的值可以通过 (具有相应的自变量的) 超几何函数的幂级数来表示. 人们还知道第 1 类完全椭圆积分也可以用算术 - 几何平均的手段完美地表达, 然而 (此刻之前) 这样一种 (极为有力而又简洁的) 表达却不适用于第 2 类完全椭圆积分. 从本文可以看出, 对于这样一个简洁公式的探求终结了, 此公式能够导致一种精确的快速收敛迭代方法用以计算椭圆的周长.

1. 代序

最近对于计算椭圆周长的 (近似的和精确的) 公式的一个回顾 [16] 错误地概述为:

没有简单精确的公式: 有简单的公式但不精确, 有精确的公式但不简单.

不再需要新的突破来驳斥这一点, 因为绝大部分 (即使不是全部!) 都已经被 Gauss (高斯) 在很久以前做完了, 只要等待做一些 (最后的) 阐明就可以了.

2. 算术 - 几何平均和它的一个修正

引入序列对 $\{x_n, y_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$x_{n+1} := \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} := \sqrt{x_n y_n}.$$

定义两个正数 x 和 y 的算术 - 几何平均 (我们将它简记为 AGM) 是 (下降) 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 (上升) 序列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 (共同) 极限, 其中 $x_0 = x, y_0 = y$.¹⁾

我们说上述的两个序列的收敛是二次的 [7, p.588]. 的确, 可以很容易地推出这一点 (以及更多). 为此, 令

$$r_n := \frac{x_n - y_n}{x_n + y_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

注意到

$$r_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}}{\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n}} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{1+r_n} - \sqrt{1-r_n}}{\sqrt{1+r_n} + \sqrt{1-r_n}} \right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1-r_n^2}}{r_n} \right)^2 \approx \frac{r_n^2}{4},$$

其中的近似等号 \approx 在这里可以理解为渐近 (由于 r_n 趋于零) 相等.

接着, 引入一个三元组序列 $\{x_n, y_n, z_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$x_{n+1} := \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} := z_n + \sqrt{(x_n - z_n)(y_n - z_n)}, \quad z_{n+1} := z_n - \sqrt{(x_n - z_n)(y_n - z_n)}.$$

定义两个正数 x 和 y 的修正的算术 - 几何平均 (我们将它简记为 MAGM) 是 (下降) 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 (上升) 序列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 (共同) 极限, 其中 $x_0 = x, y_0 = y$ 和 $z_0 = 0$.

译自: Notices of the AMS, Vol.59 (2012), No.8, p.1094-1099, An Eloquent Formula for the Perimeter of an Ellipse, Semjon Adlaj, figure number 3. Copyright ©2012 the American Mathematical Society. Reprinted with permission. All rights reserved. 美国数学会与作者授予译文出版许可.

Semjon Adlaj 是俄罗斯科学院计算中心的数学教授. 他的邮箱地址是 semjonadlaj@gmail.com.

1) 我们不需要假定 $x_0 \geq y_0$.——原注

令

$$\xi_n := x_n - z_n, \quad \eta_n := y_n - z_n, \quad \rho_n := \frac{\xi_n + \eta_n}{x_n + y_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

AGM 的每次迭代需要作一次加法, 一次除法, 一次乘法和一次开方. MAGM 的首次迭代和 AGM 的首次迭代相同. MAGM 后续的每次迭代 (比 AGM 的迭代) 需要多 3 次加法, 但 MAGM 每次迭代的收敛速度 (比 AGM 相应迭代的收敛速度) 要快, 其比值渐近地与 ρ_n 相符. 这一点由

$$r_{n+1} = \frac{\xi_{n+1} - \eta_{n+1}}{x_{n+1} + y_{n+1}} = \frac{\xi_{n+1}}{x_{n+1} + y_{n+1}} \left(\frac{\sqrt{\xi_n} - \sqrt{\eta_n}}{\sqrt{\xi_n} + \sqrt{\eta_n}} \right)^2 \approx \frac{r_n^2}{4\rho_n}$$

容易看出. 迭代到最后 (就是渐近地) 每次 ρ_n 都加倍.

有一个例子, Gauss 在 [12] 中曾 (精细地) 考虑过, 也在 [7, p.587] 中被 (草草地) 提到, 它展示了对于初值 $x = 1$ 和 $y = 0.8$ 的 AGM 收敛. 我们列出其依次接连的 4 次迭代 (砍去一些小数值后的) 近似值:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.9, \\ r_1 &\approx 0.003105620015141858539495851348, \\ y_1 &\approx 0.8944271909999158785636694674, \\ 4r_1/r_0^2 &\approx 1.00622088490596216679665583678, \\ x_2 &\approx 0.8972135954999579392818347337, \\ r_2 &\approx 0.000002411230547635880335956669, \\ y_2 &\approx 0.8972092687327323251471393964, \\ 4r_2/r_1^2 &\approx 1.000004822466909304514524340728, \\ x_3 &\approx 0.8972114321163451322144870651, \\ r_3 &\approx 0.00000000001453508188467332219, \\ y_3 &\approx 0.8972114321137369238877556369, \\ 4r_3/r_2^2 &\approx 1.0000000000290701637693677712, \\ x_4 &\approx 0.8972114321150410280511213510, \\ r_4 &\approx 0.000000000000000000000528171, \\ y_4 &\approx 0.8972114321150410280511204032, \\ 4r_4/r_3^2 &\approx 1.00000000000000000000105634. \end{aligned}$$

当然, MAGM 的首次迭代值和它是相同的. 现在我们列出 MAGM 的第 2, 第 3 和第 4 次迭代的近似值:

$$\begin{aligned} x_2 &\approx 0.8972135954999579392818347337, \\ r_2 &\approx 0.000001207486641916223450627540, \\ y_2 &\approx 0.8972114287557112303660562524, \\ 4r_2\rho_1/r_1^2 &\approx 1.000001812169285206907758643674, \\ x_3 &\approx 0.8972125121278345848239454930, \\ r_3 &\approx 0.00000000000091268194185543308, \\ y_3 &\approx 0.89721251212767081089238034335, \\ 4r_3\rho_2/r_2^2 &\approx 1.0000000000011412072150937444, \\ x_4 &\approx 0.8972125121277526978581629182, \\ r_4 &\approx 0.0000000000000000000000000260, \\ y_4 &\approx 0.8972125121277526978581629177, \\ 4r_4\rho_3/r_3^2 &\approx 1.0000000000000000000000000293. \end{aligned}$$

以及比值 (它们应该趋于 2):

$$\begin{aligned}\rho_1 &\approx 1.99689437998485814146050414865, \\ \rho_2/\rho_1 &\approx 2.00000060092645088170346112822, \\ \rho_3/\rho_2 &\approx 2.00000000000011397880639959476, \\ \rho_4/\rho_3 &\approx 2.00000000000000000000000042.\end{aligned}$$


固定 $\beta > 1$, 令 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是对于 $x_0 = \beta$ 和 $y_0 = 1$ 的收敛到 AGM 的序列, 令 $\{\xi_n\}$ 是趋于 β^2 和 1 的 MAGM 的下降序列, 其中 $\xi_0 = \beta^2$. 则下列等式成立:

$$x_n = \beta - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{x_m - y_m}{2}, \quad \xi_n = \beta^2 - \sum_{m=0}^{n-1} 2^m \frac{x_m^2 - y_m^2}{2}.$$

接下去 Gauss 在 [17] 中还考虑了另外一个例子, 其中 $\beta = \sqrt{2}$, 对于 $1 \leq n \leq 4$, 我们写出 x_n 的近似值:

$$x_1 \approx 1.2, \quad x_2 \approx 1.19815, \quad x_3 \approx 1.19814023479, \quad x_4 \approx 1.19814023473559220744,$$

再继续, 我们补充上 ξ_n 的近似:

 $\xi_1 \approx 1.5, \quad \xi_2 \approx 1.457, \quad \xi_3 \approx 1.456946582, \quad \xi_4 \approx 1.4569465810444636254.$

3. 完全椭圆积分的有效计算

不固定 β 并假设, 除非另有声明, β 和 γ 是两个正数, 它们的平方和为 1: $\beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Gauss 发现了一个高效的 (不可超越的) 方法来计算第 1 类完全椭圆积分:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\gamma^2 x^2)}} = \frac{\pi}{2M(\beta)}, \quad (1)$$

其中 $M(x)$ 是 1 和 x 的算术 - 几何平均. 特别地, 如 $\gamma^2 = -1$ (违反了假定, 另需设定), 等式 (1) 成立:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{2M(\sqrt{2})} \approx 1.31102877714605990523.$$

后一个方程的左端积分是双纽线积分, 它所表示的是焦距为 $\sqrt{2}$ 的 Bernoulli (伯努利) 双纽线的 $1/4$ 长. 数值近似所给出的精度 (假定已经知道具有充分精度的 π) 在第 4 次迭代后达到, 也就是 $\pi/(2x_4) \cdot M(\sqrt{2})$ 的倒数称为 Gauss 常数; Gauss 在将它计算到小数位 11 位之后, 1799 年 5 月 30 日他在日记 [14] 中写道, 这一发现 “打开了分析学的一个全新的领域.” 由此, 把分析学, 代数学, 几何学交织在一起的椭圆函数和椭圆曲线¹⁾的美妙领域诞生了.

方程 (1) 所给出的公式意味着把研究第 1 类椭圆积分和对椭圆函数的研究连接起来的一个质的转变. 然而, 随后寻求类似²⁾于 (1) 的用于计算第 2 类椭圆积分公式的努力都落了空, 直到 2011 年 12 月 16 日它才被发现. 事实上 (这一点尚有争议), 寻找这样一个计算第 2 类椭圆积分的 (不可超越的) 公式一直是许多天才研究椭圆函数和椭圆积分背后的一个巨大的 (常常是隐匿的) 激励和驱动力. 在 Gauss 的探索中把这个领域冠以形容

1) 我们不必刻意遵循通常 (可笑地) 区分开对椭圆曲线的研究和对椭圆函数的研究. —— 原注

2) 找寻这样的公式, 除了要求它的简洁性之外, 还必须要有个迭代和快速 (快于线性) 的收敛算法. —— 原注

词“椭圆的”，标志着计算椭圆的弧长问题一直是该领域的（最为）中心的问题。现在所知道的计算第 2 类完全椭圆积分的公式是

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-\gamma^2 x^2}{1-x^2}} dx = \frac{\pi N(\beta^2)}{2M(\beta)}, \quad (2)$$

其中 $N(x)$ 是 1 和 x 的修正的算术-几何平均。方程 (2) 的左端积分所表示的是一个长半轴单位长、短半轴为 β (离心率是 γ) 的椭圆的 1/4 周长，而右方快速收敛到的比值却是足够的初等，可在中学或者可能在小学里展示。这个公式，不同于任何一个先前计算第 2 类完全椭圆积分的公式，它除了提供了一个具有迭代性和快速收敛性这两者（这是我们所寻求的特色）的计算算法外，它还是易于明了的。另一方面，Euler (欧拉) 公式和事实上是属于 Ivory (艾沃里) [13] 的 (所谓) Gauss-Kummer (库默尔) 级数除了缺乏简洁性，也只是线性地收敛，在大离心率 (接近于 1) 的情形更是特别地慢。

把互补的第 1 类和第 2 类完全椭圆积分相互联系起来 Legendre (勒让德) 关系 [10] 现在可以重写了，从而得到关于 π 的恒等式的一个 (可取不可数无穷多个值的) 参数族：

$$\pi = \frac{2M(\beta)M(\gamma)}{N(\beta^2) + N(\gamma^2) - 1}. \quad (3)$$

特别地，得到一族可数无穷多个恒等式 (其中 $M(\gamma)$ 对 $M(\beta)$ 的比值是 $\sqrt{2}$ 的整数次幂)，由此，令 $c = \sqrt{2} - 1$ ，我们列出其中的几个：

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{M(\sqrt{2})^2}{N(2) - 1} = \frac{M(2\sqrt{\sqrt{2}c})^2/2}{N(4\sqrt{2}c^2) - 2c} = \frac{M(\sqrt{2}c)^2}{\sqrt{2}N(2c) - 1} \\ &= \frac{2M(c)^2}{\sqrt{2}N(c^2) - c} = \frac{2M(c^2)^2}{N(c^4) - c^2}, \end{aligned}$$

这里 π 的最后一组恒等式的第 1 个能够从 Euler [11] 所发现的 Legendre 关系的一个特殊情形 ($\beta = \gamma$) 推出。迭代计算 ($\beta = \sqrt{2}$) 序列 $\{x_n\}$ 和 $\{\xi_n\}$ ，对于其中指标不超过 $n = 4$ 的项我们已经计算过了，就可以得到计算 π [18] 的 (所谓) Brent-Salamin 算法。¹⁾ 记

$$\pi_n := \frac{x_n^2}{\xi_{n+1} - 1} = \frac{(\sqrt{2} + 1 - \sum_{m=1}^{n-1} (x_m - y_m))^2}{2\sqrt{2} - 1 - \sum_{m=1}^{n-1} 2^m (x_m - y_m)^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

对于 $n \leq 4$ ，我们列出比值 π_n (下降并二次地收敛于 π) 的近似值：

$$\pi_1 \approx 3.18, \quad \pi_2 \approx 3.1416, \quad \pi_3 \approx 3.1415926538, \quad \pi_4 \approx 3.141592653589793238466.$$

4. 几个例子

虽然我们的目标是提供所得到的第 2 类完全椭圆积分公式的一些应用，但我们还是很难跳过来自力学的经典的示范，这个示范提供了计算第 1 类完全椭圆积分的 Gauss 公式的光辉的例子。

a. 单摆的周期

如果 Appell (阿佩尔) 知晓了 Gauss (关于第 1 类完全椭圆积分的计算) 方法，他就不必“发现”对一个单摆 [9] 的“虚周期” [8] 的力学解释了。一个单摆 ²⁾ 的 (双值的) 周期 T

1) 明显地，“Gauss-Euler 算法”这一名称有些异样，现在要重新恢复它正确的归属了。——原注

2) T 视为 $|g|$ —— g 的模 —— 的函数。毕竟沿着“垂直”的正向的选择是任意定的，所以不论如何选择， g 的两个符号必须都要顾及到。——原注

可以清楚简明地表述为

$$T = 2\pi k \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad k := k(\theta) = \begin{cases} 1/M(\cos(\theta/2)), & \text{如果 } g > 0, \\ \sqrt{-1}/M(\sin|\theta/2|), & \text{如果 } g < 0, \end{cases}$$

这里的 l 是摆的长度, g 是 (由引力产生的) 加速度, θ 是偏离竖直向下 (正方向) 的最大倾角 (图 1), $0 < |\theta| < \pi$.

承受强度和方向 (设定它是沿着垂直方向) 都恒定的外力作用的摆的位形空间是圆. 换言之, 摆的重量被 (完整地) 约束在一个圆上, 所以它的径向分量受到轴向作用力的反向平衡.

k 取上方的值时 g 是正的, 相应的周期对应的引力是指向下方的 (这是通常假设的情形). 和它相补的周期相应于 k 的下方的值, 此时 g 是负的, 容易看到对应的引力反向了. 令人感到意外的是, 太多的 (即使不是全部!) 关于椭圆函数的“通俗”的参考书, 如 [15, p.59, 77], 以及力学的“权威”参考书, 如 [19, p.73], 都遗漏了 (直至今日) 这些优雅和强有力的表达式 (这些都应归属于 Gauss 个人), 代之以老一套, 即没有完成的计算或是用了繁琐的幂级数表示 (缺乏迭代性和收敛的便利性), 从中很难能理解 T 的双值性质. 要特别指出的是相应于 $\theta = \pi/2$ (取中间值) 的自补情形, 这时的 $|k| = \sqrt{2}/M(\sqrt{2})$. 为了充分鉴赏 Gauss 公式, 我们必须将它应用于 θ 接近于 π 的情形, 这时 T 的传统计算方法, 也就是用幂级数展开的表示, 不可能在任何合理的时间内收敛!

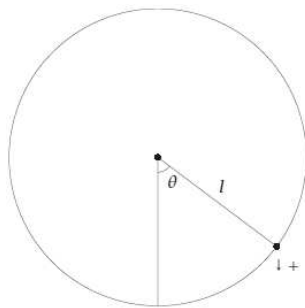


图 1 摆

b. 对应于 5 个离心率值的椭圆的周长

以 $l(\gamma)$ 记离心率为 γ 的椭圆周长与其长轴之比. 以 L 记焦距为 $\sqrt{2}$ 的 Bernoulli 双纽线的半长.¹⁾ 而用字母 M 简记 $M(\sqrt{2})$, 它是 Gauss 常数的倒数. 于是, 如同计算过的那样, $L = \pi/M$. 我们还称两个椭圆是 互补的 (complementary), 若它们的离心率平方之和是 1.

依定义, $l(0) = \pi$ 就是先前提到的关于离心率是 0, 也就是圆的比值. 与它互补的椭圆是离心率为 1 的椭圆, 可被视为半周长和它的长轴相等的 (退化) 椭圆, 所以 $l(1) = 2$. 这个等式可以用极限等式表示:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{M(\beta)}{N(\beta^2)} = \frac{\pi}{2},$$

它也可以作为 Legendre 关系 (3) 的极限情形.

我们将用公式 (3) 补充公式 (2), 来计算另外 3 类椭圆的周长.

自补椭圆是和与其外切圆同心的双纽线共焦的 (图 2). 这是我们在以上两种情形后首先要加以考虑的. 我们有

$$l(1/\sqrt{2}) = \frac{L + M}{\sqrt{2}} \approx 2.7012877620953510050.$$

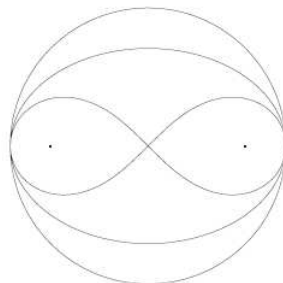


图 2 共焦的自补椭圆和内接于同心圆的双纽线

1) 也许该提醒读者注意, 按照这里给出的定义, L 是所谓的双纽线常数的两倍. —— 原注

这个方程是 Euler 发现的, 可以认为是 (稍微) 伪装¹⁾ 的 Legendre 关系的特例. 所给出的数值近似的精度在 $(\pi/x_4 + x_4)/\sqrt{2}$ (x_4 已经计算过了) 处达到.

对于两个互补的椭圆 (图 3), 它们的离心率是 c^2 (小的) 和 $2\sqrt{\sqrt{2}c}$ (大的), 有

$$l(c^2) = L + cM \approx 3.11834348914448577623,$$

$$l(2\sqrt{\sqrt{2}c}) = c(L + 2M) \approx 2.07866367001535595794.$$

数值近似的精度对于第 1 个椭圆 (它的离心率小) 在 $\pi/x_4 + cx_4$ 处达到, 对于第 2 个椭圆 (它的离心率大) 在 $c(\pi/x_4 + 2x_4)$ 处达到.

现在我们利用 ($\beta = c^2$ 的拉长了的椭圆周长的) 上述近似, 把公式 (2) 和两个大家熟知的公式作比较. 令

$$F(a, b, x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} x^n,$$

这里的 $(\cdot)_n$ 是 Pochhammer (波赫哈默尔) 符号. 比值 $l(\gamma)/\pi$ 可以通过 Euler 或者 Ivory 的公式计算得到, 分别是:

$$\frac{l(\gamma)}{\pi} = \sqrt{\frac{2-\gamma^2}{2}} F\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \left(\frac{\gamma^2}{2-\gamma^2}\right)^2\right) = \frac{1+\beta}{2} F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2\right).$$

假如用精确的算术来计算, 对于第 1 个 (Euler) 幂级数 $\sqrt{3}cF(-1/4, 1/4, 8/9)$, 需要用到 337 项才能达到对上述周长所给出的近似值的精度, 而对于第 2 个 (Ivory) 幂级数 $\sqrt{2}cF(-1/2, -1/2, 1/2)$, 则需要用到 55 项才能取得这个精度. Ivory 的公式, 尽管比 Euler 的公式要快, 但 (仍是) 线性地收敛的, 在大离心率的情形与公式 (2) 相比较更是格外地慢, 公式 (2) 是二次收敛的, 因而 Ivory 的公式在大离心率的情形并不是很好.²⁾ 如同用 Gauss 公式计算第 1 类完全椭圆积分的情形, 用以计算第 2 类完全椭圆积分的公式必定适用于椭圆模 γ 取临界值 (即接近于 1) 的情形, 而所有惯用的幂级数表示在更完满的了解形成之前都不能在一个合理的时间内收敛. 当 γ 趋于 1 时, 公式 (2) 的右端相应的值保持有界, 这不同于公式 (1) 右端相应的值. 由于传统计算的失败, 公式 (2) 的收敛性使得它具有更加令人信服的优势, 成为在临界值范围内用于实际可行计算的唯一的公式.

我们强调一下 Cayley (凯莱) 公式 [10]:

$$\begin{aligned} l(\gamma) = & 2 + \left(\ln\left(\frac{4}{\beta}\right) - \frac{1}{1 \cdot 2} \right) \beta^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\ln\left(\frac{4}{\beta}\right) - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) \beta^4 \\ & + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} \left(\ln\left(\frac{4}{\beta}\right) - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{1}{5 \cdot 6} \right) \beta^6 \\ & + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} \left(\ln\left(\frac{4}{\beta}\right) - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{2}{5 \cdot 6} - \frac{1}{7 \cdot 8} \right) \beta^8 + \dots, \end{aligned}$$

1) 我们注意到 “sine” 曲线的半个周期的长度, 就是函数 $t \mapsto \sin(t)$ 的图像以点 $t=0$ 到点 $t=\pi$ 的长度, 它等于 $\sqrt{2}l(1/\sqrt{2}) = L + M$.——原注

2) 这里另一个形式定义是可信的. 然而, 为了不致离题太远, 这里请读者来找出自己的答案.——原注

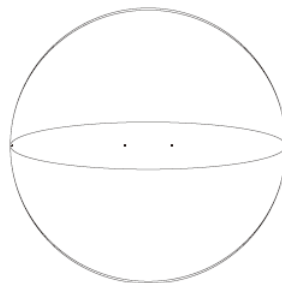


图 3 两个互补椭圆和一个圆共有单一的直径

虽然传统上将它看成是计算一个拉长了的椭圆周长的一个补救方法，但它并没有真正消除 Ivory 公式的收敛问题，而是将它代之以计算一个无界区域上 (或等价地，在零点一个邻域上) 取值的 (超越) 对数函数值的收敛问题。顺便提一句，如果要考虑上述的后一条椭圆 ($\beta = c^2$) 的近似精度，那么 (假定差 $\ln(4) - \ln(\beta)$ 已知具有了足够的精确度) Cayley 公式中一直到 (包括) β^{26} 所有的项都是必须的。如果要求更高的精度就需要更多的项，这是由于 Cayley 公式作为另一个表示周长的幂级数，其中 (β 的) 次数的增长只是线性的。¹⁾

5. 公式背后的概念和后记



在 CCRAS²⁾ 的运动稳定性和受控系统力学部的由 S. Ya. Stepanov³⁾ 带领的团队所指导的基础研究涉及到绳系卫星系统 (Tethered satellite System), 需要大量地使用椭圆函数这一工具。研究椭圆函数的两个传统的途径 (属于 Jacobi (雅可比) 和 Weierstrass (魏尔斯特拉斯)) 通过采用 Sophus Lie (李) (代数的) 解微分方程的方法，自然地统一起来了。于是，分别使得 Weierstrass 椭圆函数和 Jacobi 椭圆正弦函数所满足的微分方程不变的两个 (分式线性) 变换群相互同构 (两者都同构于 Klein (克莱因) 四元群)。使得相应的变换具有最简单形式的基本的椭圆函数可能在之后被 (典范地) 定义出来 [3]。对于这样的函数，求其半倍点处的函数值要比求 Weierstrass 椭圆函数以及 Jacobi 椭圆函数在半倍点处的值会少很多麻烦，特别地，这样能够获取在格点的所有八分点处的精确值 (用二次根式表达) [4]。模不变量在其基本区的边界上的确切取值也被 (最为) 有效地计算出来。寻求模不变量的显式反演公式的艰苦工作始于 Abel (阿贝尔) [1], Ramanujan (拉马努金) 曾坚定地追寻 (但没成功)，终于在 2011 年 5 月 30 日 (纪念 Gauss 发现的 212 周年大会) 达到了目的 [5]。进一步，关于椭圆曲线上半倍点的典范公式 (通过对于二倍点公式有效地反演) 也已被得到。并且获得了计算 (不完全) 椭圆积分一个迭代算法 (是对于这种积分的反演的可构造性的传统观点的质的修正)。这篇文章里所展示的计算椭圆周长的公式成为了下一个迭代算法。我们高度推荐 L. M. Milne-Thomson [2, 第 17 章] 的“椭圆积分”一章为一个基本的综览，还有一段提到 Landen (兰登) 变换的从 [7, p.591] 摘录的引文看来对于这样一个结论是恰当的：“事实上，Landen 自己显然从来没有理解他思想的重要性。”

我们必须同意这样的说法：花费了两个多世纪的时间，Gauss 的思想才真正地被传承下来！

参考文献

- [1] N. H. Abel, Recherches sur les fonctions elliptiques, Journal für die reine und angewandte Mathematik 2 (1827), 101–181.
- [2] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Dover Publications, New York, 1972.
- [3] S. Adlaj, Tether equilibria in a linear parallel force field, 4th IYR Workshop on Geome-

1) 即使是一个高阶的多项式 (β 的幂) 增长也不足以和公式 (2) 的收敛速度相媲美，至少是要指数的增长才行！——原注
 2) 即位于俄罗斯莫斯科的俄罗斯科学院计算中心。——原注
 3) Sergey Yakovlevich Stepanov 是陀螺稳定性和卫星可稳性研究 (1960 年代) 的先驱之一。——原注



try, Mechanics and Control, Ghent, Belgium, 2010. <http://www.wgmc.ugent.be/adlaj.pdf>.

- [4] _____, Eighth lattice points. arXiv:1110.1743 (2011).
- [5] _____, An inverse of the modular invariant. arXiv:1110.3274 (2011).
- [6] _____, Iterative algorithm for computing an elliptic integral, Issues on Motion Stability and Stabilization, 2011, 104–110 (in Russian).
- [7] G. Almkvist and B. Berndt, Gauss, Landen, Ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses, π , and the Ladies diary, Amer. Math. Monthly 95 (1988), 585–608.
- [8] P. Appell, Sur une interprétation des valeurs imaginaires du temps en Mécanique, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 87, no.1 (Juillet 1878).
- [9] P. Appell and E. Lacour, Principes de la Théorie des Fonctions Elliptiques et Applications, Gauthier-Villars, Paris, 1897.
- [10] A. Cayley, An Elementary Treatise on Elliptic Functions, G. Bell & Sons, London, 1895.
- [11] L. Euler, De Miris Proprietatibus Curvae Elasticae sub Aequatione $y = \int \frac{xxdx}{\sqrt{1-x^4}}$ Contentae, presented to the St. Petersburg Academy of Sciences on September 4, 1775.
- [12] C. Gauss, Nachlass, Arithmetisch geometrisches Mittel, Werke, Vol. 3, K.öniglichen Gesell. Wiss., Göttingen, 1876, 361–403.
- [13] J. Ivory, A new series for the rectification of the ellipse, Transactions of the Royal Society of Edinburgh 4, II(1796), 177–190.
- [14] F. Klein, Gauss' wissenschaftliches Tagebuch 1796–1814, Mathematische Annalen 57 (1903), 1–34.
- [15] H. McKean and V. Moll, Elliptic Curves: Function Theory, Geometry, Arithmetic, Cambridge University Press, 1999.
- [16] G. P. Michon, Final answers: Perimeter of an ellipse <http://numerica.com/answer/ellipse.htm> (updated May 17, 2011).
- [17] C. D. Offner, Computing the digits of π . (September 6, 2009), <http://www.cs.umb.edu/~offner/files/pi.pdf>.
- [18] E. Salamin, Computation of π using arithmetic-geometric mean, Mathematics of Computation 30, no. 135 (1976), 565–570.
- [19] E. T. Whittaker, A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies; with an introduction to the problem of three bodies, Cambridge University Press, 1917.

(姚景齐 译 赵春来 校)

(上接 47 页)

- [3] I. Bernstein and P. Hilton, On suspensions and comultiplications, Topology 2 (1963), 73–82.
- [4] P. Hilton and J. Roitberg, On the classification problem for H-spaces of rank two, Comment. Math. Helv. 45 (1970), 50–516.

(赵振江 译 陆柱家 校)