О вычислении периметра касательного многоугольника

Обозначим p полупериметр выпуклого n-угольника, в который вписана окружность единичного радиуса. Сумма углов θ_i, $1 \le i \le n$, равна $(n-2)\pi$, а полупериметр p удовлетворяет равенству:

$$p = \sum_{i=1}^{n} \cot\left(\frac{\theta_i}{2}\right).$$

В случае треугольника имеем:

$$p = \cot\left(\frac{\theta_1}{2}\right) + \cot\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + \cot\left(\frac{\theta_3}{2}\right) = \cot\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cot\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\cot\left(\frac{\theta_3}{2}\right).$$

Разумеется, что тогда полупериметр p можно выразить без явного вовлечения третьего угла:

$$p = \frac{\cot(\theta_1/2) + \cot(\theta_2/2)}{1 - \tan(\theta_1/2)\tan(\theta_2/2)}.$$

В случае трапеции, углы которой при основании θ_1 и θ_2, имеем:

$$p = \cot\left(\frac{\theta_1}{2}\right) + \tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right) + \cot\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + \tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right) = 2\left(\csc\theta_1 + \csc\theta_2\right).$$

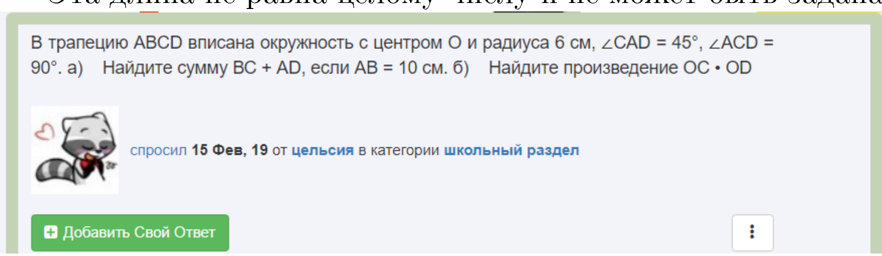
Отметим, что

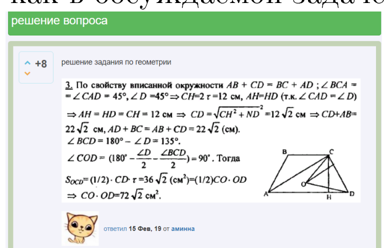
$$\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \csc\theta + \cot\theta,\ \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \csc\theta - \cot\theta.$$

Решим распространённую в сети интернет задачу о трапеции, у которой $\theta_1 = \pi/4$, а $\cot(\theta_2/2)$ можно найти как разницу заданной длины основания (4) и $\cot(\theta_1/2) = \cot(\pi/8) = \csc(\pi/4) + \cot(\pi/4) = \sqrt{2}+1$. Следовательно, $\cot(\theta_2/2) = 3-\sqrt{2}$, а длина стороны, противоположной стороне с длиной $2\csc(\pi/4) = 2\sqrt{2}$, вычисляется как

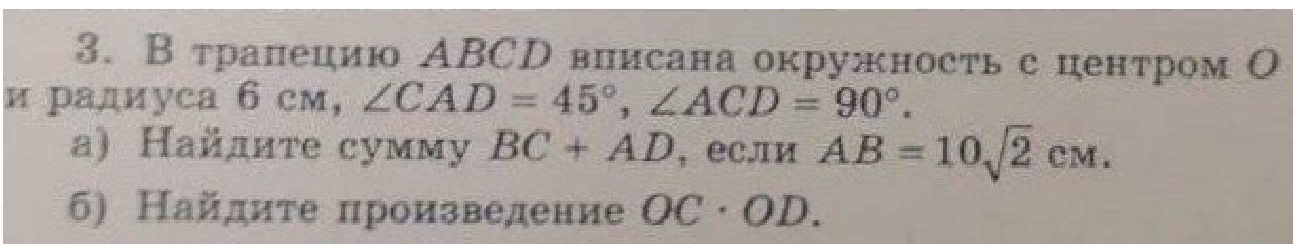
$$2\csc\theta_2 = \cot\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + \tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right) = 3 - \sqrt{2} + \frac{3+\sqrt{2}}{7} = 6\left(\frac{4-\sqrt{2}}{7}\right).$$

Эта длина не равна целому числу и не может быть задана, как в обсуждаемой задаче.





Забавно, что сея некорректная задача была "скорректирована", с целью получения полупериметра, кратного $\sqrt{2}$.



3. В трапецию $ABCD$ вписана окружность с центром O и радиуса 6 см, $\angle CAD = 45°$, $\angle ACD = 90°$.
а) Найдите сумму $BC + AD$, если $AB = 10\sqrt{2}$ см.
б) Найдите произведение $OC \cdot OD$.

Однако полупериметр нашей трапеции вычисляется так

$$p = 2\left(\csc\left(\frac{\pi}{4}\right) + \csc\theta_2\right) = 2\sqrt{2} + 6\left(\frac{4-\sqrt{2}}{7}\right) = 8\left(\frac{3+\sqrt{2}}{7}\right).$$ [1]

Подчеркнём, что в задаче избыточно задана длина боковой стороны трапеции $(2\sqrt{2})$,[2] которая совпадает с удвоенным косекансом угла $\pi/4$, образованного между указанной боковой стороной и основанием (длина которого 4). Такое совпадение величин $(2\csc(\pi/4) = 2\sqrt{2})$ подтверждает, что речь шла (не о произвольном четырёхугольнике, а) именно о трапеции. Тем самым избыточным оказывается первоначально наложенное требование к четырёхугольнику, что он является трапецией, поскольку заданные условия задачи не оставляют четырёхугольнику никаких шансов трапецией не быть. Совпадение длины боковой стороны с указанным удвоенным косекансом доказывает, что заданный четырёхугольник является трапецией (без такого предварительного требования). Составители лишили себя последнего шанса на спасение, ибо они теперь не смогут отказаться от того, что надуманный ими четырёхугольник был трапецией. Их задача настолько безнадёжно порочна, что исправлению не подлежит, а подлежит обязательному изъятию со всех сайтов и списков заданий многочисленных московских школ и “математической вертикали”. Поэтому мы приветствуем широкую рассылку нашего открытого сообщения, дабы оно попало и ответственным и безответственным (за качество образования) лицам.

Весьма часто некорректные задачи могут быть нами успешно использованы для выявления типовых и широко распространённых ошибок. С падением квалификации составителей мы часто наблюдаем, как красивые задачи прошлого тысячелетия превращаются в “авторские” задачи нынешнего. Такие современные задачи легко исправлять устранением авторского (обычно избыточного и ошибочного) “вклада”, выявляющего непонимание сути исходной задачи в исходной формулировке (и порой слишком сильно выявляющего уровень “нового автора старой задачи”). Весьма показательна “система расценок” баллов за “шаги” решения типовых задач “единого” экзамена по физике, о чём было отдельно рассказано (на конференции САМ-2023). Исключительно редко некомпетентные составители современных задач осмеливаются самостоятельно сочинять их. Нам было бы интересно узнать, кем именно задача о трапеции была столь смело составлена и кем именно она была допущена (или, по недосмотру, пропущена) в массовое “обучение” школьников. В.А. Васильев был мощным фильтром, спасшим школьников от огромных объёмов информационного мусора, а кто же заменит его теперь?

С.Ф. Адлай,
научный сотрудник Вычислительного центра им. А.А. Дородницына

[1] А умножение p на радиус вписанной окружности никак не упасёт составителей такой задачи от неминуемо вечного позора.

[2] Мы по-прежнему предполагаем радиус вписанной окружности равным единице. Да пускай наша единица станет их шестью сантиметрами. ☺