Рассматриваем движение твердого тела в случае Эйлера. Компоненты векторов задаем в системе координат, образованной главными центральными осями инерции с ортонормированным базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. В этой системе угловая скорость тела $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, его матрица тенора инерции $\operatorname{diag}(A, B, C)$, кинетический момент $\mathbf{K} = (A\omega_1, B\omega_2, C\omega_3)$. Введем вектор

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{e}_2}{|\mathbf{K} \times \mathbf{e}_2|}.$$

Аналогичный вектор можно определить и для ортов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_3$, свойства соответствующих векторов $\mathbf{a}$ будут похожи. Но затем мы сосредоточимся на случае $A < B < C$ и движениях близких к сепаратрисе. В этом случае интерес представляет выписанный вектор. Вычислим его производную по времени.

Запишем $\mathbf{p} = \mathbf{K} \times \mathbf{e}_2$, $p = |\mathbf{p}|$. Учтем $p\dot{p} = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{p}}$. Тогда

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{p}}{p}, \quad \dot{\mathbf{a}} = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{p} - \frac{\dot{p}\mathbf{p}}{p^2} = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{p} - \frac{(\dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}}{p^3} = \frac{\dot{\mathbf{p}}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}(\dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{p})}{p^3} = \frac{\mathbf{p} \times (\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{p})}{p^3} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a},$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{p} \times \dot{\mathbf{p}}}{p^2}.$$

Заметим $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{a} = 0$. Далее $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{K} \times \dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{K} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2)$,

$$\mathbf{p} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \times [\mathbf{K} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2)] = \mathbf{K}[\mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2)] - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{K}) = \mathbf{K}[\mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2)],$$

поскольку $\mathbf{p} \cdot \mathbf{K} = 0$. Таким образом

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{(\mathbf{K} \times \mathbf{e}_2) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2)}{|\mathbf{K} \times \mathbf{e}_2|^2} \mathbf{K}.$$

Скалярный множитель перед $\mathbf{K}$

$$\frac{(\mathbf{K} \times \mathbf{e}_2) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2)}{|\mathbf{K} \times \mathbf{e}_2|^2} = \frac{\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{e}_2) \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_2)}{|\mathbf{K}|^2 - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{e}_2)^2} = \frac{A\omega_1^2 + C\omega_3^2}{A^2\omega_1^2 + C^2\omega_3^2}.$$

На сепаратрисе орт $\mathbf{a}$ ортогонален плоскости сепаратрисы, его компоненты в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ постоянны;

$$A\omega_1^2 + C\omega_3^2 = B(\Omega^2 - \omega_3^2), \quad A^2\omega_1^2 + C^2\omega_3^2 = B^2(\Omega^2 - \omega_2^2), \quad \Omega = \mathrm{const} \neq 0,$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{K}}{B}, \quad |\boldsymbol{\Omega}| = |\Omega|.$$

В инерциальном пространстве $\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{const}$.

В любом движении тела орт $\mathbf{a}$ ортогонален вектору $\mathbf{K}$. Его скорость обращается в нуль только на стационарных вращениях $\boldsymbol{\omega} = \Omega\mathbf{e}_2$. При движении в окрестности двух сепаратрис величина $|\boldsymbol{\Omega}| \approx |K|/B$ почти постоянна. Она меняется вблизи точек, в которых траектория в пространстве $R^3(\boldsymbol{\omega})$ пересекает плоскость $\omega_2\omega_3$ или плоскость $\omega_3\omega_1$. В этих точках соответственно $|\boldsymbol{\Omega}| = |K|/C$ или $|\boldsymbol{\Omega}| = |K|/A$. В инерциальном пространстве орт $\mathbf{a}$ движется достаточно плавно, а в главных осях он быстро проходит средние участки обеих сепаратрис и надолго застревает вблизи стационарных вращений $\boldsymbol{\omega} = \pm|B^{-1}\mathbf{K}|\mathbf{e}_2$ (эффект Джанибекова). На среднем участке каждой сепаратрисы орт $\mathbf{a}$ почти ортогонален ее плоскости. В окрестности стационарных вращений он переходит от одной сепаратрисы к другой.

Интегрирование уравнений Эйлера в случае движения по сепаратрисе. Первые интегралы энергии и модуля кинетического момента запишем в виде

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = B\Omega^2, \quad A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = B^2\Omega^2, \quad \Omega \neq 0.$$

Умножим первое соотношение на B и вычтем из него второе соотношение, получим

$$A(B-A)\omega_1^2 - C(C-B)\omega_3^2 = 0.$$

Последнее соотношение можно записать так

$$\frac{B-A}{C}\omega_1^2 = \frac{C-B}{A}\omega_3^2 \equiv x^2.$$

Полагая $x > 0$, можно записать

$$\omega_1 = \pm x\sqrt{\frac{C}{B-A}}, \quad \omega_3 = \pm x\sqrt{\frac{A}{C-B}}.$$

Выбор знаков здесь произволен. Имеющиеся четыре возможности выбора отвечают четырем сепаратрисам. Ниже в обеих формулах возьмем «$+$». Подстановка последних соотношений в уравнения Эйлера

$$A\dot{\omega}_1 + (C-B)\omega_2\omega_3 = 0, \quad C\dot{\omega}_3 + (B-A)\omega_1\omega_2 = 0$$

дает одинаковый результат:

$$\dot{x} + \nu x\omega_2 = 0, \quad \nu = \sqrt{\frac{(C-B)(B-A)}{AC}}.$$

Подстановка тех же соотношений в уравнение Эйлера

$$B\dot{\omega}_2 + (A-C)\omega_1\omega_3 = 0$$

приводит к уравнению

$$\dot{\omega}_2 = \frac{C-A}{B\nu}x^2.$$

Выражение для x^2 найдем из интеграла энергии:

$$B(\Omega^2-\omega_2^2)=A\omega_1^2+C\omega_3^2=\left(\frac{AC}{B-A}+\frac{AC}{C-B}\right)x^2=\frac{C-A}{\nu^2}x^2,$$

$$x^2=\frac{\nu^2 B}{C-A}(\Omega^2-\omega_2^2).$$

Подставив это выражение в уравнение для ω_2, получим

$$\dot\omega_2=\nu(\Omega^2-\omega_2^2).$$

Интегрирование этого уравнения сводится к квадратуре (полагаем $\Omega>0$):

$$\left(\frac{1}{\Omega+\omega_2}+\frac{1}{\Omega-\omega_2}\right)d\omega_2=2\nu\Omega dt,$$

$$\ln\frac{\Omega+\omega_2}{\Omega-\omega_2}=e^{2\alpha},\quad \alpha=\nu\Omega(t-t_0),$$

$$\omega_2=\Omega\frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha}=\Omega\tanh\alpha.$$

Подставим последнюю формулу в уравнение для x. Имеем

$$\dot x+\nu\Omega x\frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha}=0,\quad \dot x\cosh\alpha+x\frac{d\cosh\alpha}{dt}=0,\quad \frac{d(x\cosh\alpha)}{dt}=0.$$

Здесь использованы соотношения

$$\frac{d\cosh\alpha}{dt}=\frac{d\cosh\alpha}{d\alpha}\dot\alpha=\nu\Omega\sinh\alpha.$$

Отсюда

$$x=\frac{x(t_0)}{\cosh\alpha},\quad x(t_0)=\nu\sqrt{\frac{B[\Omega^2-\omega_2^2(t_0)]}{C-A}}.$$

Примем для простоты $t_0=0$, $\omega_2(0)=0$. Тогда

$$\alpha=\nu\Omega t,\quad x(t_0)=\nu\Omega\sqrt{\frac{B}{C-A}},\quad x(t)=\frac{\nu\Omega}{\cosh\alpha}\sqrt{\frac{B}{C-A}},$$

$$\omega_1(t)=\frac{\Omega}{\cosh\alpha}\sqrt{\frac{B(C-B)}{A(C-A)}},\quad \omega_2=\Omega\tanh\alpha,\quad \omega_3(t)=\frac{\Omega}{\cosh\alpha}\sqrt{\frac{B(B-A)}{C(C-A)}},$$

$$\mathbf{a}=-\mathbf{e}_1\sqrt{\frac{C(B-A)}{B(C-A)}}+\mathbf{e}_3\sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}}.$$

Получим описание найденного движения в стандартных углах Эйлера. Компоненты кинетического момента в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ имеют вид

$$A\omega_1 = B\Omega \sin\theta \sin\varphi, \quad B\omega_2 = B\Omega \sin\theta \cos\varphi, \quad C\omega_3 = B\Omega \cos\theta.$$

Отсюда

$$\cos\theta = \frac{C\omega_3}{B\Omega} = \frac{1}{\cosh\alpha}\sqrt{\frac{C(B-A)}{B(C-A)}}, \quad \tan\varphi = \frac{A\omega_1}{B\omega_2} = \frac{1}{\sinh\alpha}\sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}}.$$

Из кинематических уравнений Эйлера следует

$$\dot\psi = \frac{\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi}{\sin\theta}.$$

С помощью формул для компонент кинетического момента выразим в этом уравнении $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ через ω_1 и ω_2; учтем соотношение $A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 =$ $= B^2\Omega^2 \sin^2\theta$. Получим

$$\dot\psi = \frac{A\omega_1^2 + B\omega_2^2}{B\Omega \sin^2\theta} = B\Omega \frac{A\omega_1^2 + B\omega_2^2}{A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2} = \Omega \frac{\dfrac{A\omega_1^2}{B\omega_2^2} + 1}{\dfrac{A^2\omega_1^2}{B^2\omega_2^2} + 1} = \Omega \frac{\dfrac{C-B}{C-A} + \sinh^2\alpha}{\dfrac{A(C-B)}{B(C-A)} + \sinh^2\alpha}.$$

При $t \to +\infty$ имеем

$$\omega_1 \to 0, \quad \omega_2 \to \Omega, \quad \omega_3 \to 0, \quad \theta \to \frac{\pi}{2}, \quad \varphi \to 0, \quad \dot\psi \to \Omega.$$

Стандартные углы Эйлера не удобны в этом случае. Удобнее система координат с базисными ортами $\mathbf{E}_1 = \mathbf{K}/B\Omega$, $\mathbf{E}_2 = \mathbf{a}$, $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$. Эта система вращается вокруг $\mathbf{E}_1$ с постоянной угловой скоростью Ω, $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}_2 = 0$, $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}_1 = \tanh\alpha$. Движение в углах Эйлера выглядит так при $t \to +\infty$. Если углы Эйлера задать относительно неподвижной системы XYZ с ортами $\mathbf{i} = \mathbf{E}_2$, $\mathbf{j} = \mathbf{E}_3$, $\mathbf{k} = \mathbf{E}_1$, то движение будет выглядеть также просто.