

Функция трёх неупорядоченных пар

Введём функцию f (от пяти переменных)

$$f(a, b, c, x, y) := \frac{a-b}{c} \left(\frac{(a-c)x}{b} + \frac{(b-c)y}{a} \right),$$

и тотчас же отметим, что она удовлетворяет тождеству (Якоби):

$$f(a, b, c, x, y) + f(b, c, a, y, z) + f(c, a, b, z, x) \equiv 0.$$

Теперь введём функции

$$g(a, b, c, x, y) := \frac{c b f(a, b, c, x, y)}{(a-b)(a-c)} = x + \frac{b(b-c)y}{a(a-c)},$$

$$g_n(a, b, c, x, y, z) := b^n g(b, a, c, y, x) + c^n g(c, a, b, z, x).$$

Функции g_1 и g_2 оказываются инвариантными под действием (шести) перестановок (группы треугольника) трёх пар (a, x) , (b, y) и (c, z) :

$$g_1(a, b, c, x, y, z) = ax + by + cz, \quad g_2(a, b, c, x, y, z) = a^2x + b^2y + c^2z.$$